



MODEL ANTRIAN TRAFIK

Modul 7. Rekayasa Trafik Telekomunikasi

Dr. Ir. Prima Kristalina, MT
Mei 2019

OUTLINE

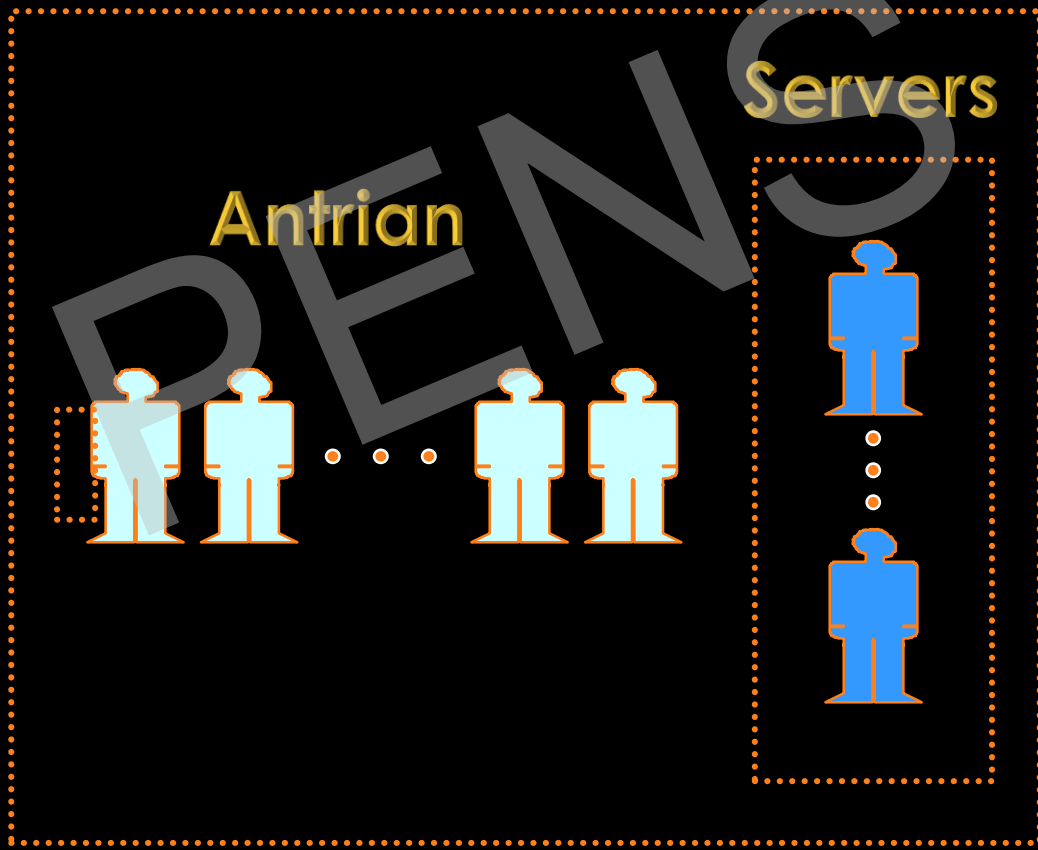
- Pendahuluan tentang Sistem Antrian
- Komponen sistem Antrian
- Karakteristik Proses Antrian
- Notasi Kendall
- Implementasi Antrian dalam Single Channel
- Implementasi Antrian dalam Multi Channel
- Hukum Little
- Aplikasi Hukum Little pada Antrian Trafik
- Erlang C untuk Probabilitas Call dalam Sistem Antrian
- Formula Erlang C untuk penyelesaian Antrian Murni dan Campuran
- Soal-soal

DEFINISI SISTIM ANTRIAN

- Sistim Antrian dapat didefinisikan sebagai:
 - “Customer datang untuk mendapatkan layanan, menunggu jika tidak segera terlayani, dan meninggalkan sistim antrian jika sudah terlayani”
- Yang dimaksud customer bisa berupa: manusia, kendaraan, barang, mesin, dsb.
 - A. Kedatangan utk layanan
 - B. Menunggu utk layanan
 - C. Mendapat layanan
 - D. Meninggalkan sistem

KOMPONEN SISTIM ANTRIAN

Sistim Layanan



BEBERAPA CONTOH SISTIM LAYANAN DENGAN ANTRIAN

- Pelanggan menunggu pelayanan di depan kasir.
- Mahasiswa menunggu untuk konsultasi dengan dosen pembimbing akademik.
- Mahasiswa menunggu untuk registrasi dan pembayaran uang kuliah.
- Para penumpang kereta api menunggu pelayanan loket penjualan karcis.
- Para pengendara kendaraan menunggu untuk mendapatkan pelayanan pengisian bahan bakar.
- Pelanggan menunggu pelayanan di Kentucky Fried Chicken.
- Pesawat terbang menunggu pelayanan menara pengawas untuk melakukan landing maupun take up.

Sistem	Garis tunggu atau antrian	Fasilitas pelayanan
1. Lapangan terbang	Pesawat menunggu di landasan	Landasan pacu
2. Bank	Nasabah (orang)	Kasir
3. Pencucian mobil	Mobil	Tempat pencucian mobil
4. Bongkar muat barang	Kapal dan truk	Fasilitas bongkar muat
5. Sistem komputer	Program komputer	CPU, Printer, dan lain-lain
6. Bantuan pengobatan darurat	Orang	Ambulance
7. Perpustakaan	Anggota perpustakaan	Pegawai perpustakaan
8. Registrasi mahasiswa	Mahasiswa	Pusat registrasi
9. Skedul sidang pengadilan	Kasus yang disidangkan	Pengadilan

PROSEDUR MENGERJAKAN ANTRIAN

- **Langkah 1.** Tentukan sistem antrian apa yang harus dipelajari.
- **Langkah 2.** Tentukan model antrian yang cocok dalam menggambarkan sistem.

Dalam kasus pompa bensin, paling sedikit ada tiga model yang dapat digunakan yaitu:

1. Tiga pompa untuk pertalite, satu garis tunggu,
 2. Tiga pompa untuk pertalite, masing-masing memiliki garis tunggu,
 3. Satu pompa untuk pertalite, satu pompa untuk pertamax, dan satu pompa untuk solar dengan masing-masing memiliki garis tunggu.
- **Langkah 3.** Gunakan formula matematik atau metode simulasi untuk menganalisa model antrian.

KEGUNAAN TEORI ANTRIAN

- Traffic control (Jaringan komunikasi, trafik lalu lintas pesawat)
- Planing (Sistim manufaktur, pemrograman komputer, coverage sinyal dll)
- Dimensioning fasilitas (BTS, pabrik dll)

KARAKTERISTIK PROSES ANTRIAN

1. Pola kedatangan
2. Pola layanan
3. Disiplin antrian
4. Kapasitas sistem
5. Jumlah kanal layanan
6. Jumlah tingkat/stages layanan

POLA KEDATANGAN

- **Stochastic**
 - Distribusi probabilitas
 - Kedatangan tunggal/single atau kelompok/batch
- **Kelakuan pelanggan**
 - Pelanggan sabar
 - Menunggu selamanya
 - Pelanggan tidak sabar
 - Menunggu utk suatu periode waktu dan memutuskan utk pergi
 - Melihat antrian panjang dan memutuskan tdk bergabung
 - Mengubah barisan utk menunggu

POLA LAYANAN

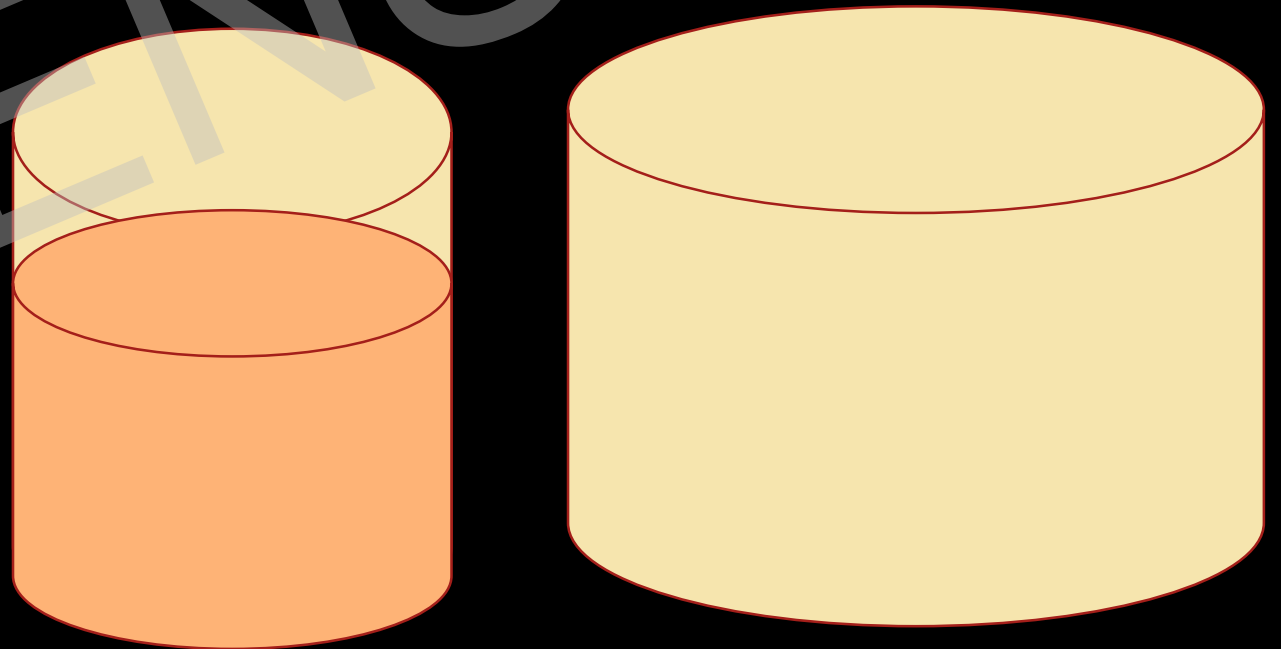
- Distribusi utk waktu layanan
- Layanan tunggal/single atau batch (mesin paralel)
- Proses layanan tergantung jumlah pelanggan menunggu (state dependent)
- Layanan sangat cepat → masih memerlukan antrian?
 - Tergantung juga pada kedatangan
 - Mengasumsikan mutually independent

DISIPLIN ANTRIAN

- Cara pelanggan-pelanggan mendapatkan layanan
 - First come, first serve (FCFS)
 - Last come, first serve (LCFS)
 - Random serve
 - Priority serve
 - Preemptive
 - Nonpreemptive

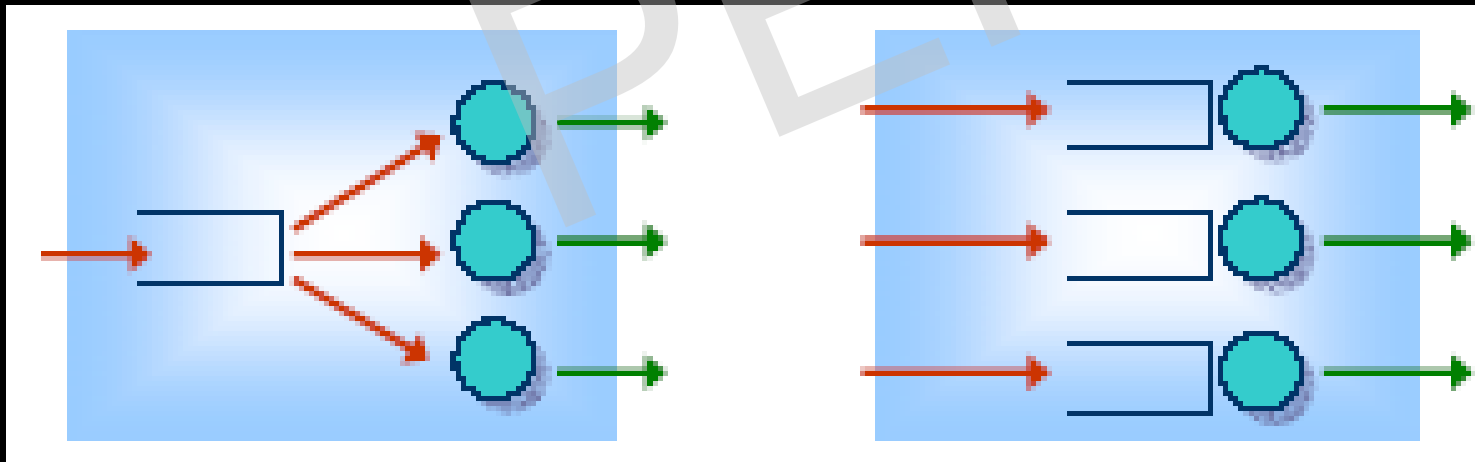
KAPASITAS SISTIM

- Kapasitas terbatas
 - Ukuran sistem maksimum
- Kapasitas tdk terbatas



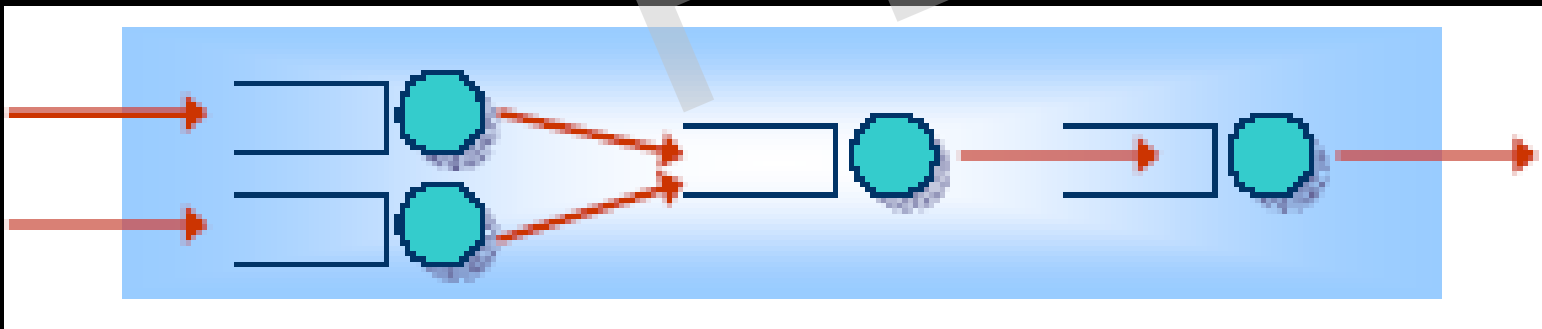
JUMLAH KANAL LAYANAN

- Sistem antrian multiserver
 - Single line service
 - Multiple line service



TINGKAT/STAGES LAYANAN

- **Single stage**
- **Multiple stages**
 - Tanpa feedback (Entrance Exam)
 - Dengan feedback (Manufacturing)



NOTASI ANTRIAN

- Notasi Kendall (1953)

A / B / X / Y / Z

A : Distribusi waktu antar kedatangan

B : Distribusi waktu layanan

X : Jumlah kanal layanan paralel

Y : Kapasitas sistem

Z : Disiplin antrian

SIMBOL DALAM NOTASI KENDALL

A/B/X/Y/Z

Characteristics	Symbol	Explanation
A & B (Interarrival / Service Time)	M D E_k G	Exponential (Memory less) Deterministic Erlang General
X (# Servers)	1,2,..., ∞	
Y (Capacity)	1,2,..., ∞	
Z (Q discipline)	FCFS, PR	

BEBERAPA JENIS DISTRIBUSI WAKTU KEDATANGAN DAN LAYANAN

- **M**: "Markovian", menyatakan distribusi eksponensial untuk waktu layanan atau waktu antar kedatangan
- **D**: Deterministik (contohnya fixed constant)
- **E_k**: Erlang dengan parameter k
- **H_k**: Hyperexponential dengan parameter k
- **G**: General (umum)

CONTOH PENGGUNAAN NOTASI KENDALL

- **M/M/3/∞/FCFS**

- Waktu antar kedatangan exponential
- Waktu layanan exponential
- 3 server paralel
- Kapasitas ruang tunggu tak terbatas
- Disiplin antrian First-Come First-Serve

- **M/D/1**

- Waktu antar kedatangan exponential
- Waktu layanan Deterministic
- 1 server
- Kapasitas ruang tunggu tdk terbatas (default)
- Disiplin antrian FCFS (default)

BEBERAPA CONTOH LAIN

- $M/M/1$
- $M/M/c/k$
- $M/M/\infty$
- $Ek/M/1$
- $M/G/1$
- $G/M/m$
- $G/G/1$

PENS

IMPLEMENTASI NOTASI KENDALL DALAM SISTIM ANTRIAN (1/3)

- $G/G/m$
 - Waktu antar kedatangan dg distribusi $A(t)$
 - Waktu layanan dg distribusi $B(x)$
 - m servers
- C_n : pelanggan ke- n memasuki sistem

$$P[t_n \leq t] = A(t)$$

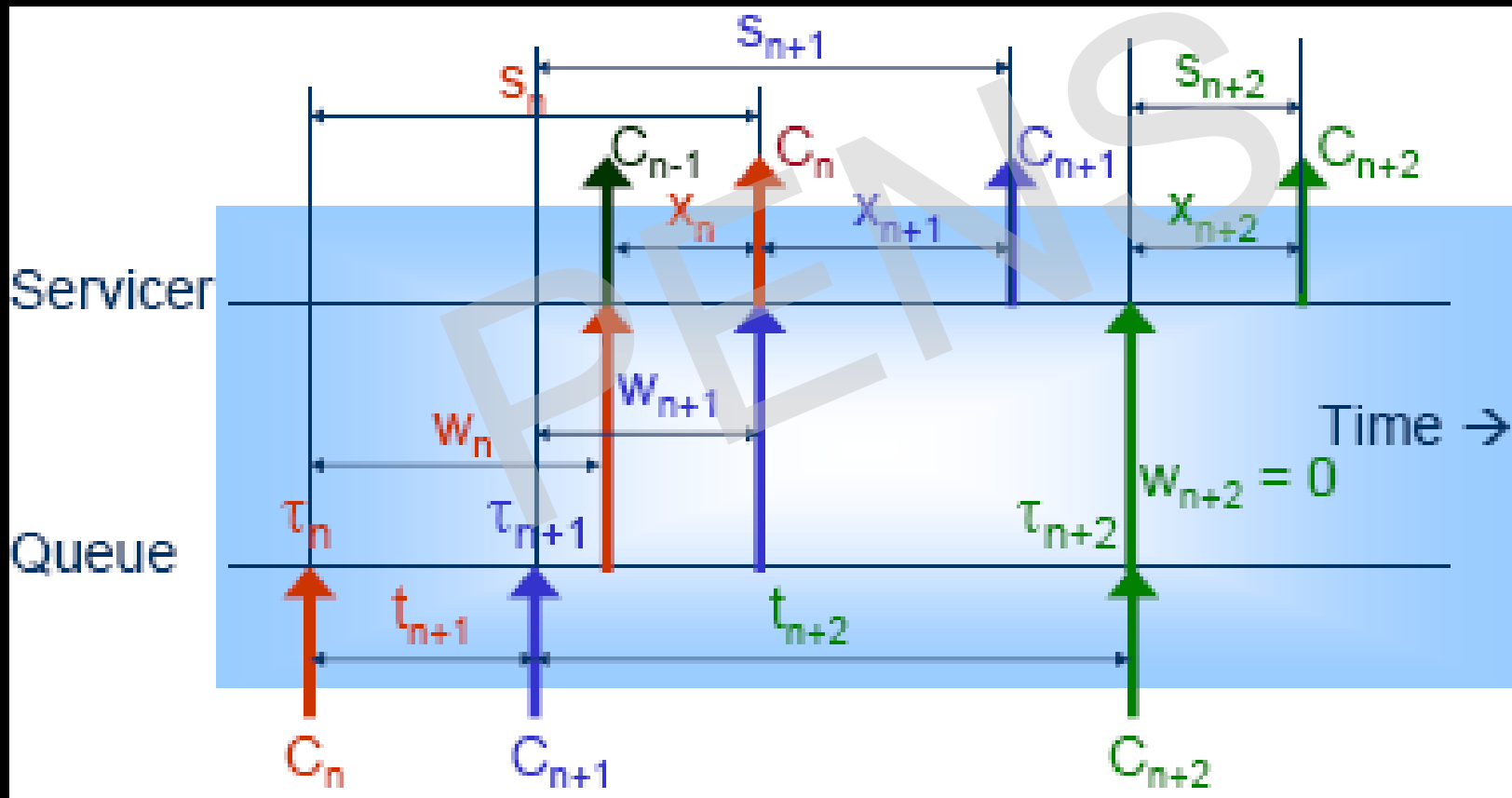
$$P[x_n \leq x] = B(x)$$

IMPLEMENTASI NOTASI KENDALL DALAM SISTIM ANTRIAN (2/3)

- τ_n : waktu kedatangan utk C_n
- t_n : Waktu antar kedatangan ($\tau_n - \tau_{n-1}$)
- x_n : Waktu layanan untuk C_n
- w_n : Waktu tunggu dlm antrian utk C_n
- s_n : Waktu dlm sistem utk $C_n \rightarrow (w_n + x_n)$
- λ : Laju kedatangan rata-rata
- μ : Laju layanan rata-rata

$$\bar{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{1}{\lambda}$$
$$\bar{X} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\mu}$$

IMPLEMENTASI NOTASI KENDALL DALAM SISTIM ANTRIAN (3/3)



Sumber: Rekayasa Trafik, sukiswo@elektro.ft.undip.ac.id

IMPLEMENTASI ANTRIAN M/M/1 (SINGLE CHANNEL)

Persamaan yang digunakan dalam sistem (M/M/1) dapat dilihat sebagai berikut:

1. $p = \frac{\lambda}{\mu}$ = Tingkat intensitas fasilitas pelayanan.

2. $p_n = p^n(1 - p)$ = Probabilitas kepastian n pelanggan dalam sistem.

3. $L = \frac{p}{1 - p} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ Jumlah rata-rata pelanggan yang diharapkan dalam sistem.

4. $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{p^2}{1 - p}$ Jumlah pelanggan yang diharapkan menunggu dalam antrian.

5. $W = \frac{1}{\mu - \lambda}$ Waktu yang diharapkan oleh pelanggan selama dalam sistem.

6. $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ Waktu yang diharapkan pelanggan selama menunggu dalam antrian.

SOAL (SINGLE CHANNEL - M/M/1)

- PT SGT mengoperasikan satu buah pompa bensin dengan satu orang operator yang bernama John, Rata-rata laju kedatangan kendaraan mengikuti distribusi Poisson yaitu 20 kendaraan/mobil per jam. John dapat melayani rata-rata 25 mobil per jam. Hitunglah soal-soal berikut ini untuk John.
 - a. Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan (ρ).
 - b. Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem.
 - c. Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrian.
 - d. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem (menunggu pelayanan).
 - e. Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrian.

- Jawab:

diketahui $\lambda = 20$ dan $\mu = 25$

- a. Tingkat intensitas (kegunaan) pelayanan atau p

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0,8$$

- b. Jumlah rata-rata kendaraan yang diharapkan dalam sistem.

$$L = \frac{p}{1-p} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4$$

- c. Jumlah kendaraan yang diharapkan menunggu dalam antrian

$$L_q = \frac{p^2}{1-p} = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,20$$

- Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan selama dalam sistem

$$w = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{25 - 20} = \frac{1}{5} = 0,20 \text{ jam} = 12 \text{ menit}$$

- Waktu yang diharapkan oleh setiap kendaraan untuk menunggu dalam antrian

$$w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{25(25 - 20)} = \frac{20}{125} = 0,16 \text{ jam} = 9,6 \text{ menit}$$

IMPLEMENTASI ANTRIAN M/M/S (MULTI CHANNEL)

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s! (1 - \frac{\lambda}{s\mu})} \right\}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} (P_0), & \text{jika } 0 \leq n \leq s \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} (P_0), & \text{jika } n \geq s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^s p}{s! (1-p)^2}$$

$$L = \lambda W = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

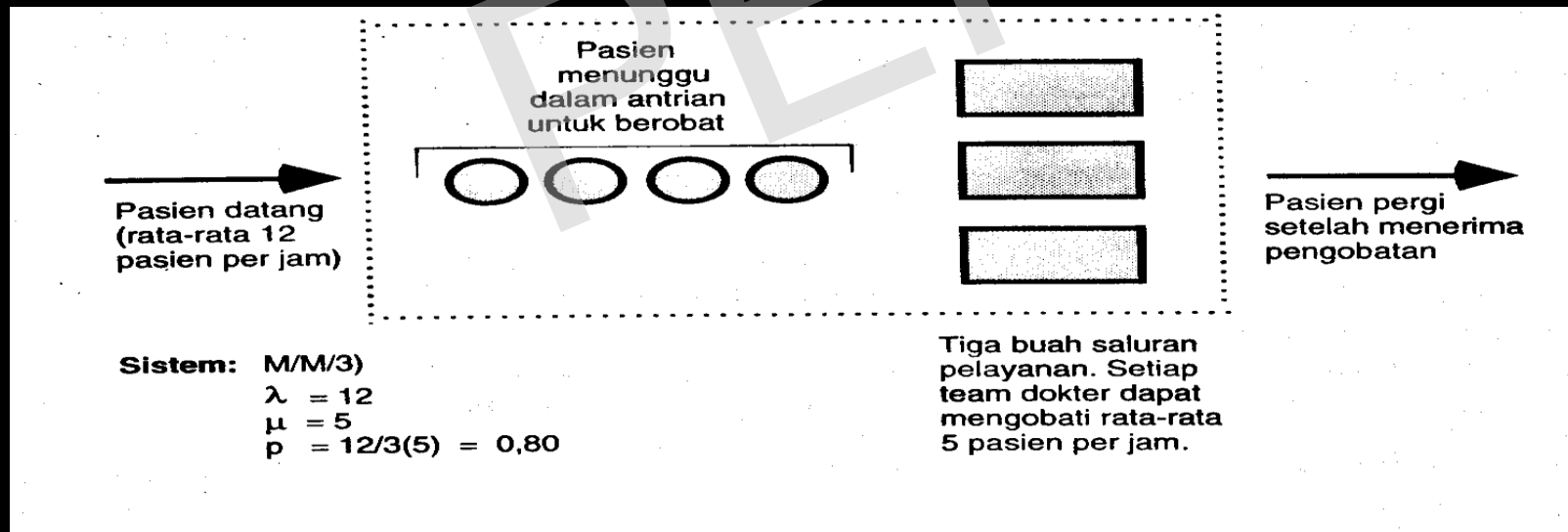
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

- Dasar yang digunakan dalam multiple-channel model adalah sistem (M/M/s).
- Perbedaannya dengan single-channel model adalah terletak pada **jumlah fasilitas pelayanan**. Dalam multiple-channel model, fasilitas pelayanan yang dimiliki lebih dari satu.
- Huruf (s) yang terdapat dalam sistem (M/M/s) menyatakan jumlah fasilitas pelayanan.

SOAL (MULTI CHANNEL – M/M/3)

- Sebuah rumah sakit memiliki sebuah ruang gawat darurat (RGD) yang berisi tiga bagian ruangan yang terpisah untuk setiap kedatangan pasien. Setiap ruangan memiliki satu orang dokter dan satu orang jururawat. Secara rata-rata seorang dokter dan jururawat dapat merawat 5 orang pasien per jam. Apabila pasien yang dihadapi hanya luka-luka ringan, mereka dapat melayani rata-rata 12 pasien per jam.



a. Probabilitas kepastian per pasien dilayani:

$$p = \frac{\lambda}{\mu s}$$

Jika, $\lambda = 12$
 $\mu = 5$
 $s = 3$

$$p = \frac{12}{(5)(3)} = \frac{12}{15} = 0,80$$

b. Jumlah pasien yang diharapkan menunggu dalam antrian:

$$L_q = \frac{p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p}{s! (1-p)^2}$$



$$\begin{aligned} L_q &= \frac{0,20 \left(\frac{12}{5}\right)^3 \left(\frac{12}{15}\right)}{3! \left(1 - \frac{12}{15}\right)^2} \\ &= \frac{0,20(13,824)(0,80)}{6(0,04)} \\ &= \frac{2,21184}{0,24} \\ &= 9,216 \text{ pasien.} \end{aligned}$$

c. Rata-rata pasien menunggu antrian selama $0,768 \cdot 60 = 46$ menit

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{9,216}{12} = 0,768 \text{ jam atau } 46 \text{ menit}$$

d. Pasien menunggu dalam sistem selama $0,968 \cdot 60 = 58$ menit

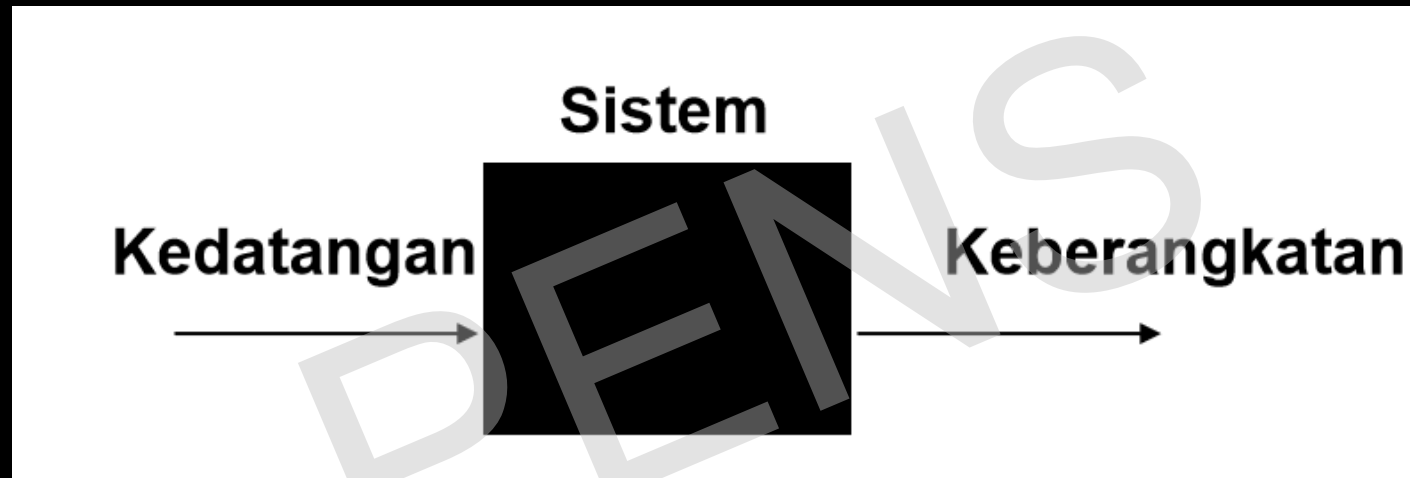
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,768 + \frac{1}{5} = 0,968 \text{ jam atau } 58 \text{ menit}$$

e. Pihak rumah sakit mengharapkan ada 12 pasien berada di dalam system layanan

$$L = \lambda W = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \lambda W = 12(0,968) = 11,62.$$

HUKUM LITTLE



- **Hukum Little:**

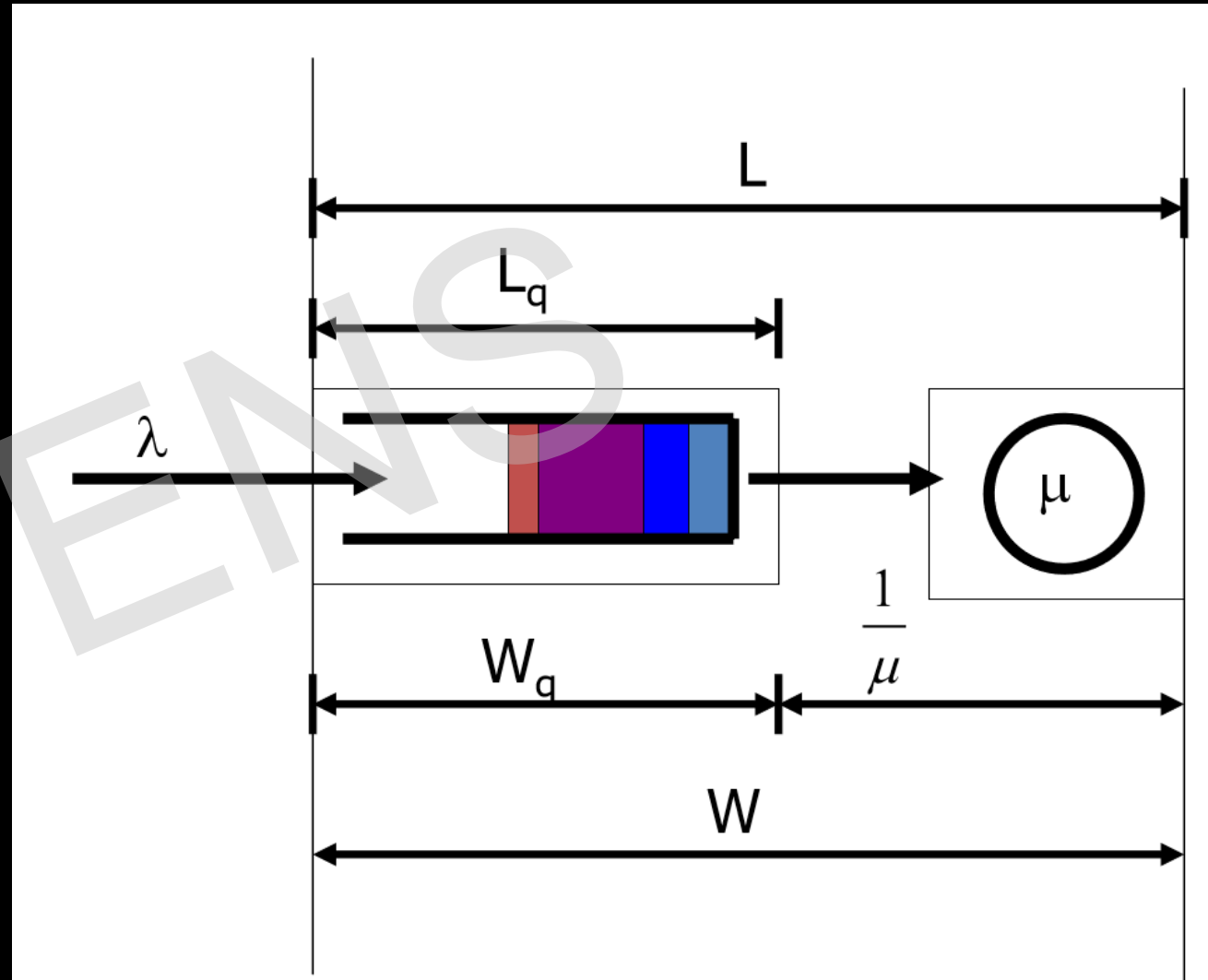
- Jumlah task rata-rata dalam sistem = laju kedatangan task rata-rata dikalikan waktu respon rata-rata
- Jumlah rata-rata pelanggan dlm sistem antrian = laju kedatangan pelanggan ke sistem tsb, dikalikan rata-rata waktu yg dihabiskan dalam sistem

NOTASI HUKUM LITTLE

- J: Kapasitas sistem
- N: Jumlah job (paket atau pelanggan)
- T: Waktu total
- λ : Laju kedatangan rata-rata $\rightarrow N/T$
- W: Waktu rata-rata job berada dalam sistem $\rightarrow J/N$
- L: Jumlah rata-rata job dalam sistem $\rightarrow J/T$

APLIKASI HUKUM LITTLE PADA ANTRIAN TRAFIK

Model Antrian M/M/1



DEFINISI

- λ : Laju kedatangan job (paket pada link input)
- μ : Laju layanan server (link output)
- L : jumlah paket rata-rata dalam sistem
- L_q jumlah paket rata-rata dalam antrian
- W : waktu tunggu rata-rata dalam keseluruhan sistem
- W_q : waktu tunggu rata-rata dalam antrian

- **Contoh:**

- Pada suatu wartel yang terdiri dari lebih 2 pesawat telepon, diketahui 50 pelanggan melakukan panggilan di dalam satu jamnya dengan rata-rata waktu pemakaian 3 menit.

- Hitung :

- a. Jumlah telepon rata-rata yang digunakan
- b. Waktu tunggu rata-rata jika terdapat rata-rata 1,2 pelanggan yang menunggu

Jawab:

a. Laju kedatangan = $\lambda = 50/\text{jam} = 50/60 = 5/6$ call per menit

Laju layanan = $\mu = 1/3$

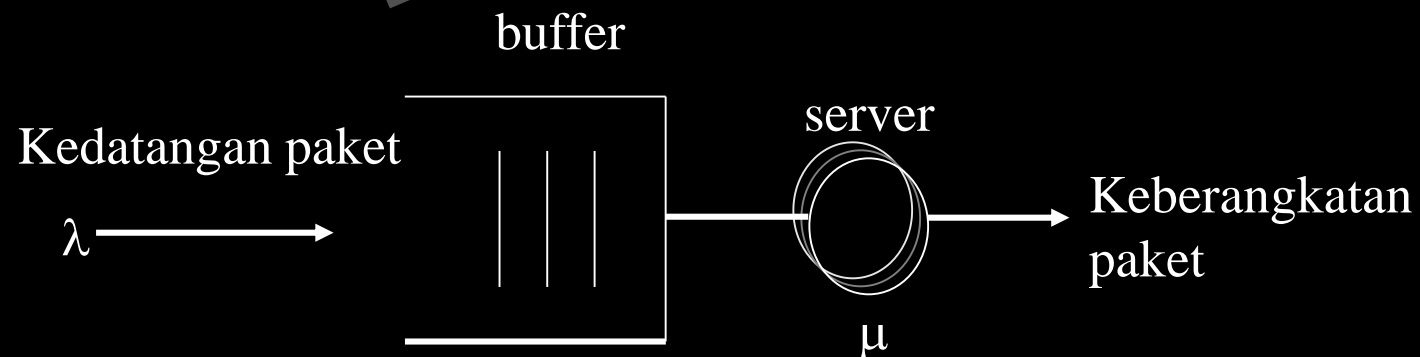
Traffic load = $l/\mu = (5/6) \times 3 = 2,5$ Erlang \rightarrow jumlah rata-rata telepon yang digunakan adalah 2,5

b. Waktu tunggu rata-rata dicari menggunakan rumus Little

Diketahui $L=1,2$ maka $W=L/\lambda = 1,2/(5/6)=1,44$ menit

ERLANG C UNTUK PROBABILITAS CALL PADA SISTEM ANTRIAN

- Agner Krarup Erlang, mempublikasikan pertama kali tentang teori antrian (queuing theory) pada tahun 1909.
- Dalam model erlang C, perlu diketahui terlebih dahulu jumlah panggilan atau paket dalam jam sibuk, panjang panggilan rata-rata atau ukuran paket dan besarnya delay yang diharapkan (dijijinkan) dalam detik.
- Model erlang C digunakan untuk menentukan bandwidth pada transmisi data, tapi ini bukanlah model yang terbaik untuk tujuan tersebut.



ASUMSI MODEL TRAFIK ERLANG C

- Model trafik Erlang C didasarkan pada asumsi sebagai berikut :
 1. Jumlah sumber yang terbatas
 2. Pola kedatangan trafik random
 3. Trafik yang ditolak di delay
 4. Holding time terdistribusi eksponensial negatif
 5. *Full availability*
 6. Panggilan yang datang masuk dalam antrian dan disimpan sampai ada server yang bebas
 7. FCFS (*first come first serve*), panggilan yang menunggu dilayani menurut datangnya panggilan.

DESKRIPSI ANTRIAN PADA SISTEM TELEKOMUNIKASI

- **Proses Stokastik**

- Kedatangan (arrival) → Bagaimana pelanggan datang ke sistem
- Layanan (service) → Berapa banyak layanan yang diharapkan oleh seorang pelanggan

- **Parameter sistem**

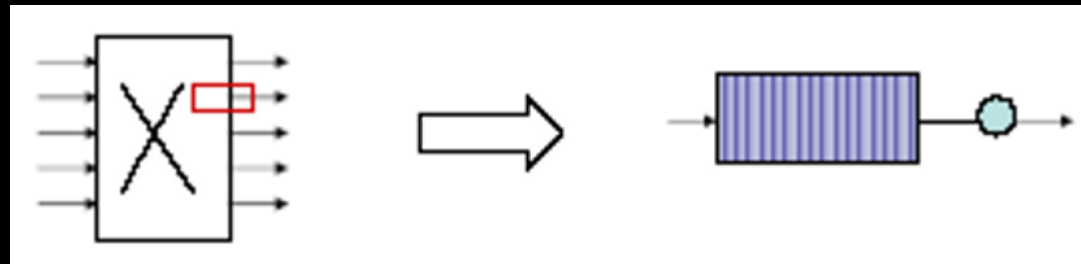
- Jumlah server
- Jumlah stage (tahap) layanan
- Kapasitas Buffer
 - Infinite → tak terbatas (cukup ruang untuk semua pelanggan)
 - Finite → terbatas (ada pelanggan yang terpaksa diblok)
- Urutan layanan

- **Contoh:**

1. *Transmisi paket pada link output pada IP router yang besar*

- **Skenario:**

- Proses kedatangan: paket IP dimultipleks di output buffer
- Proses layanan: transmisi per 1 paket IP
- (waktu layanan = Panjang paket / laju transmisi)
- Jumlah server = 1
- Jumlah tahap layanan = 1
- Kapasitas buffer = jumlah maksimum paket IP
- Urutan layanan = FCFS



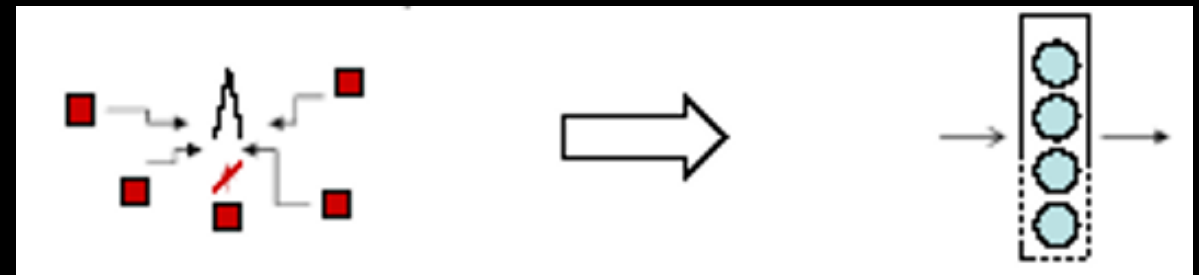
- **Contoh:**

2. *Voice call pada sistim GSM*

Tersedia banyak kanal (parallel), setiap call menduduki 1 kanal
Jika semua kanal sibuk, maka call berikutnya akan diblok

- **Skenario:**

- Proses kedatangan: call menuju sel GSM
- Proses layanan: telephone call
- (waktu layanan = durasi dari telephone call)
- Jumlah server = jumlah kanal paralel
- Jumlah tahap layanan = 1
- Kapasitas buffer = tidak ada buffer

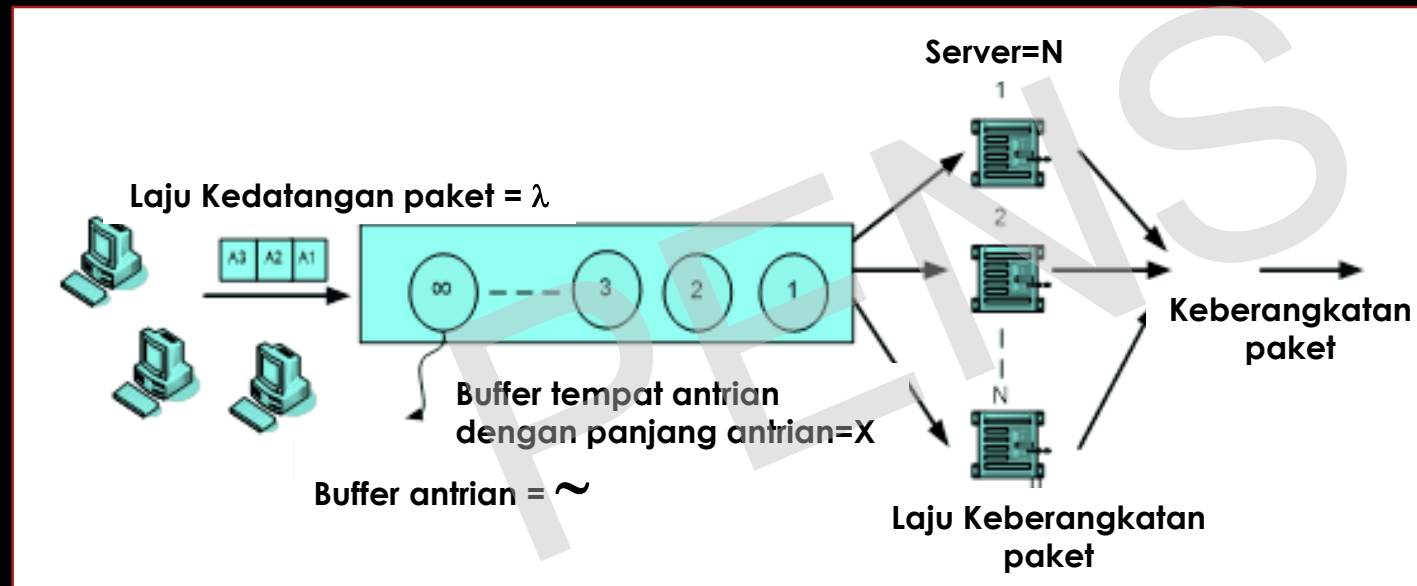


ANTRIAN MURNI (1/2)

Pada system antrian murni, jumlah atau ukuran buffer yang disediakan tidak terbatas (∞) sehingga panggilan datang ke system akan menemui dua kemungkinan,

1. Panggilan datang akan dilayani
 2. Panggilan datang harus menunggu.
- Jika panggilan datang saat semua server sibuk, maka panggilan akan menunggu di buffer
 - Tidak ada panggilan yang hilang hanya ada sebagian yang menunggu sebelum dilayani

ANTRIAN MURNI (2/2)

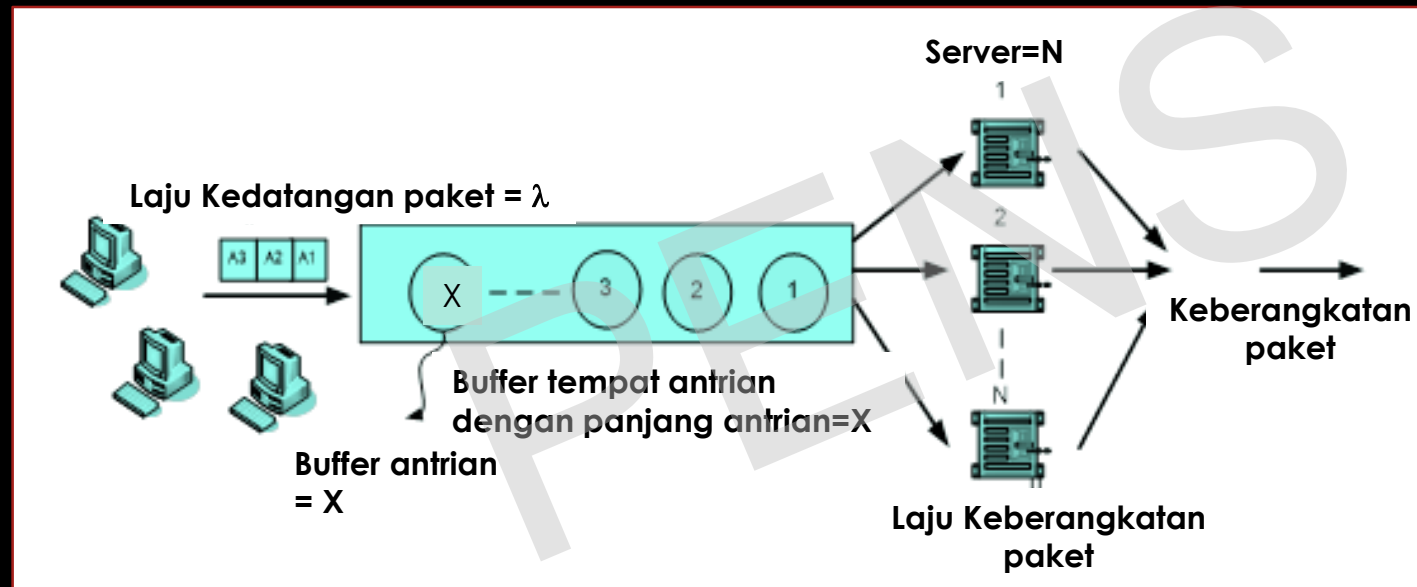


ANTRIAN CAMPURAN (1/2)

Pada system antrian campuran, jumlah atau ukuran buffer yang disediakan tidak terbatas ($0 < X < \infty$) sehingga panggilan datang ke system akan menemui tiga kemungkinan,

1. Panggilan datang akan dilayani
 2. Panggilan datang harus menunggu.
 3. Panggilan datang terpaksa ditolak atau dihilangkan
- Jika ada panggilan yang datang ketika semua server sibuk, namun masih ada tempat yang kosong di buffer, maka panggilan akan menempatnya untuk menunggu dilayani
 - Jika panggilan datang ketika buffer penuh dan semua server sibuk, panggilan tersebut akan dihilangkan

ANTRIAN CAMPURAN (2/2)



FORMULA ERLANG C UNTUK ANTRIAN MURNI

- Probabilitas Menunggu

$$D_N = \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A} \cdot P(0)$$

- Probabilitas Dilayani

$$P_{dilayani} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}$$

- Probabilitas Blocking

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}$$

FORMULA ERLANG C UNTUK ANTRIAN CAMPURAN

- Probabilitas Menunggu

$$D_N = \frac{A^N}{N!} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{A}{N}\right)^k \cdot P(0)$$

- Probabilitas Blocking

$$P(n) = \frac{\left(\frac{A}{N}\right)^n \frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{A}{N}\right)^k \cdot \frac{A^N}{N!}}$$

- Probabilitas Dilayani

$$P_{dilayani} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{A}{N}\right)^k \cdot \frac{A^N}{N!}}$$

CONTOH-CONTOH SOAL

1. Pada sebuah sistem antrian, panggilan datang dalam setiap menit. Jika rata-rata waktu panggilan yang terdapat dalam sistim adalah 2 menit. Jumlah server yang melayani ada 3.

Hitung:

- a. Berapa probabilitas suatu panggilan akan dilayani?
- b. Berapa probabilitas suatu panggilan akan menunggu?
- c. Berapa probabilitas suatu panggilan akan ditolak?

Aplikasikan soal di atas untuk:

- A. Antrian Murni
- B. Antrian Campuran dengan jumlah buffer antrian = 4

2. Dengan menggunakan persamaan hubungan peluang tunggu Erlang B dan Erlang C, tentukan berapa probabilitas suatu panggilan menunggu jika trafik yang ditawarkan sebesar 2 erlang dan jumlah server yang melayani sebanyak 5 ?
3. Melanjutkan soal nomer 2, berapa probabilitas layanan tersebut di atas akan dilayani jika antriannya adalah antrian murni?
4. Masih berkaitan dengan soal nomer 2, berapa probabilitas panggilan tersebut akan ditolak jika menggunakan server sejumlah 3? Gunakan Formula Erlang B dan Erlang C