Program Pasca Sarjana Terapan
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Probability and Random Process

Topik 8. Estimasi Parameter

Prima Kristalina
Juni 2015

Outline

1. Terminologi Estimasi Parameter
2. Sifat-sifat dan jenis estimasi Parameter
3. Estimasi Interval
4. Estimasi Rata-rata (μ)
5. Estimasi Proporsi (p)
6. Estimasi Beda Dua Proporsi
7. Soal-soal latihan

Terminologi Estimasi Parameter

- Disebabkan berbagai hal, seperti banyaknya individu dalam populasi pengamatan, maka penelitian untuk keseluruhan populasi menjadi tidak ekonomis, baik dari sisi tenaga, waktu dan biaya.
- Untuk itu penelitian dilakukan dengan pengambilan sampel saja.
- Harga sebuah **parameter** hanya di-**estimas**i kan / diduga berdasarkan harga-harga statistik sampel.
- Teknik statistika digunakan untuk mengetahui parameter dalam populasi (rata-rata μ, simpangan baku σ, proporsi p, koefisien korelasi ρ dsb) dengan menggunakan statistik dalam sampel acak yang sesuai.
- *Parameter* disebut sebagai: *true value*, sedangkan *statistik* adalah: *estimate value*

  Contoh: $\overline{x}$ adalah estimator dari μ, s adalah estimator dari σ

Sumber:
Ira Prasetyaningrum, Estimasi, PENS & Rina Sugiarti, Estimasi Parameter, FE Gunadarma

Sifat-sifat Estimasi

- Dalam membuat estimasi harga parameter populasi, seyogyanya variabel random harga statistik sampel tidak bervariasi terlalu jauh dari harga parameter populasi yang konstan.
  - Contoh: jika μ merupakan mean bagi populasi, dan X merupakan nilai estimator dari μ, maka nilai d tidak terlalu besar.

- Estimator yang baik memiliki beberapa sifat:
  1. Tidak bias / *unbiased*
  2. Efisien
  3. Konsisten

Jenis Estimasi

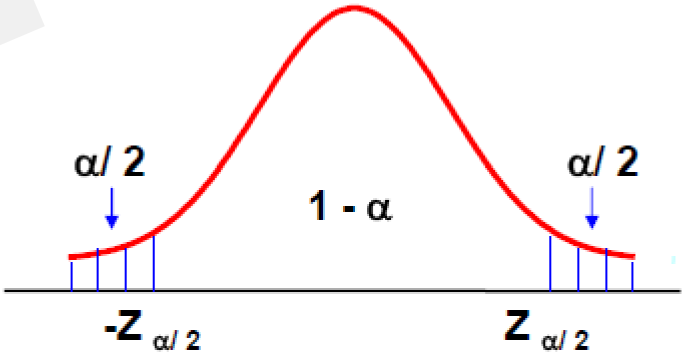
- Estimasi Titik (Point Estimation)
  - Mengestimasi suatu parameter berdsarkan satu nilai saja.
  - Contoh: mengestimasi μ dengan $\overline{x}$
  - Hasil estimasi tidak memberikan tingkat keyakinan tertentu
- Estimasi Interval (Interval Estimation)
  - Mengestimasi suatu parameter berdasarkan banyak nilai dalam suatu interval tertentu.
  - Contoh: mengestimasi μ menggunakan interval estimasi:
  - $\mu = \overline{x} \pm d$ dimana d adalah perbedaan $true$ dan $estimate$ $value$. Nilai d ini disebut juga sebagai error estimasi.
  - Hasil estimasi interval lebih memiliki tingkat keyakinan tertentu

Estimasi Interval (1/4)

- Estimasi Interval menunjukkan pada interval berapa suatu parameter populasi akan berada.
- Estimasi ini dibatasi oleh dua nilai, disebut sebagai batas atas dan batas bawah, yang masing-masing mempunyai simpangan *d* dari estimatornya.
- Besarnya *d* akan tergantung kepada:
  1. Ukuran sampel acak yang digunakan
  2. Tingkat keyakinan (*level of confidence*)
  3. Distribusi probabilitas untuk statistik (*estimated value*) yang digunakan.

Estimasi Interval (2/4)

- Tingkat keyakinan (level of confidence) perlu ditentukan lebih dulu untuk mengestimasi sebuah parameter.
- Tingkat keyakinan untuk estimasi parameter disimbolkan sebagai **1-α**, dimana α adalah taraf nyata / besarnya kesalahan yang ditolerir dalam membuat keputusan
- Perhatikan hubungan tingkat keyakinan **1-α** dan taraf nyata α pada grafik distribusi normal



Estimasi Interval (3/4)

- Tingkat keyakinan (1-α) adalah pernyataan probabilitas. Jadi nilainya adalah **0 <(1-α)< 1**
- Hubungan antara nilai estimasi (estimate value, $\overline{x}$), nilai sebenarnya (*true value*, μ) dan tingkat keyakinan (1-α) diberikan dalam pernyataan:

$$P\left(\overline{x} - d < \mu < \overline{x} + d\right) = 1 - \alpha$$

- Dalam pengujian distribusi normal telah dijelaskan cara mengkonversikan nilai mean dan varians data ke dalam bentuk Z sbb:

$$\boxed{Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}$$

Estimasi Interval (4/4)

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow \mu = \overline{x} + Z.\left(\sigma / \sqrt{n}\right) \rightarrow \mu = \overline{x} \pm Z.\left(\sigma / \sqrt{n}\right)$$

sehingga: $d = Z.\left(\sigma / \sqrt{n}\right)$

Maka interval keyakinan-nya adalah:

$$\boxed{P\left(\overline{x} - Z_{0,5\alpha}.\left(\sigma / \sqrt{n}\right) < \mu < \overline{x} + Z_{0,5\alpha}.\left(\sigma / \sqrt{n}\right)\right) = 1 - \alpha}$$

Estimasi Rata-rata (1/3)

- Ada 2 jenis :

1. Kasus sampel besar (n>30) dan atau σ diketahui
   - Untuk Populasi tidak terbatas (infinite population)
   - Untuk Populasi terbatas (finite population)
2. Kasus sampel kecil (n<30) dan atau σ tidak diketahui
   - Untuk Populasi tidak terbatas (infinite population)
   - Untuk Populasi terbatas (finite population)

Estimasi Rata-rata (2/3)

1. Kasus **sampel besar** (n>30) dan atau σ diketahui:

   - Populasi <u>tidak terbatas</u>

$$P\left(\bar{x} - Z_{0,5\alpha}.\left(\sigma / \sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{0,5\varepsilon}.\left(\sigma / \sqrt{n}\right)\right) = 1 - \alpha \;\rightarrow \sigma \text{ diketahui}$$

$$P\left(\bar{x} - Z_{0,5\alpha}.\left(s / \sqrt{n}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{0,5\alpha}.\left(s / \sqrt{n}\right)\right) = 1 - \alpha \;\rightarrow \sigma \text{ tidak diketahui}$$

   - Populasi <u>terbatas</u>

$$P\left(\bar{x} - Z_{0,5\alpha}.\left(\sigma / \sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{0,5\alpha}.\left(\sigma / \sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)\right) = 1 - \alpha \;\rightarrow \sigma \text{ diketahui}$$

$$P\left(\bar{x} - Z_{0,5\alpha}.\left(s / \sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) < \mu < \bar{x} + Z_{0,5\alpha}.\left(s / \sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)\right) = 1 - \alpha \;\rightarrow \sigma \text{ tidak diketahui}$$

Estimasi Rata-rata (3/3)

1. Kasus **sampel kecil** (n<30) dan atau σ diketahui:

- Populasi tidak terbatas

$$P\left(\bar{x}-t_{0,5\alpha;df}.\left(s/\sqrt{n}\right)<\mu<\bar{x}+t_{0,5\alpha;df}.\left(s/\sqrt{n}\right)\right)=1-\alpha$$

- Populasi terbatas

$$P\left(\bar{x}-t_{0,5\alpha;df}.\left(s/\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)<\mu<\bar{x}+t_{0,5\alpha;df}.\left(s/\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)\right)=1-\alpha$$

Dengan: **df=n-1**

- <u>Contoh Soal 1:</u>

Diambil sampel acak dari 100 mahasiswa sebuah PT di Jakarta. Hasil test IQ pada 100 mahasiswa tsb didapatkan rata-ratanya 112 dan varians 100. Dengan level keyakinan 95%, tentukan interval konfidens untuk nilai rata-rata IQ dari seluruh mahasiswa PT tersebut.

Diket:

$$n = 100 \quad \overline{x} = 112 \quad \sigma^2 = 100 \rightarrow \sigma = 10$$

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow 0,5\alpha = 0,025 \rightarrow Z_{0,025} = 1,96$$

$$P\left(112 - 1,96.10/\sqrt{100} < \mu, 112 + 1,96.10/\sqrt{100}\right) = 0,95$$

$$P\left(110,04 < \mu < 113,96\right) = 0,95$$

Jadi dengan keyakinan 95% dapat dikatakan bahwa rata-rata IQ seluruh mahasiswa PT tersebut adalah antara 110,04 dan 113,96

- <u>Contoh Soal 2:</u>

Diambil 10 buah sampel acak dari pengujian kecepatan bit dalam sebuah kanal komunikasi (bps) dengan nilai masing-masing: 142,157, 138, 175,152, 149, 148, 200, 182 dan 164. Dengan level keyakinan 95%, tentukan interval estimasi data-data tersebut.

Diket:

$$n = 10 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{1607}{10} = 160,7$$

Jadi dengan keyakinan 95% dapat dikatakan bahwa rata-rata data kecepatan bit adalah antara 146,66 dan 174,74

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{10(261,711) - (1607)^2}{10(9)}} = 19,62$$

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow 0,5\alpha = 0,025 \rightarrow t_{0,025;df=9} = 2,262$$

$$P\left(160,7 - 2,262.19,62/\sqrt{10} < \mu < 160,7 - 2,262.19,62/\sqrt{10}\right) = 0,95$$

$$P(146,66 < \mu < 174,74) = 0,95$$

Estimasi Proporsi (1/2)

1. Kasus **sampel besar** (n>30) dan atau σ diketahui:

   - Populasi <u>tidak terbatas</u>

$$P\left(\bar{p}-Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\bar{p}\left(1-\bar{p}\right)}{n}}<p<\bar{p}+Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\bar{p}\left(1-\bar{p}\right)}{n}}\right)=1-\alpha$$

   - Populasi <u>terbatas</u>

$$P\left(\bar{p}-Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\bar{p}\left(1-\bar{p}\right)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}<p<\bar{p}+Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\bar{p}\left(1-\bar{p}\right)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)=1-\alpha$$

Estimasi Proporsi (2/2)

1. Kasus **sampel kecil** (n<30) dan atau σ diketahui:

- Populasi <u>tidak terbatas</u>

$$P\left(\overline{p}-t_{0,5\alpha;df}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}<p<\overline{p}+t_{0,5\alpha;df}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=1-\alpha$$

- Populasi <u>terbatas</u>

$$P\left(\overline{p}-t_{0,5\alpha;df}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}<p<\overline{p}+t_{0,5\alpha;df}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)=1-\alpha$$

Dengan: ***df=n-1***

- Contoh Soal 3:
  - Dari hasil survey yang dilakukan agen iklan terhadap kebiasaan ibu-ibu rumah tangga dalam menyaksikan iklan tayangan tv swasta didapatkan bahwa 76 orang dari 180 orang yang dipilih secara acak biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedikit 2 jam per minggu. Jika peneliti tersebutmenggunakan level keyakinan sebesar 90%, tentukan interval estimasi seluruh ibu rumah tangga yang biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedikit 2 jam per minggu.

Diket:

$$n = 180 \quad X = 76 \quad \overline{p} = \frac{X}{n} = \frac{76}{180} = 0{,}42$$

$$1 - \alpha = 90\% = 0{,}9$$

Ditanya: $P(.. < p < ..) = 0.9$

Jawab:

$$P\left(\overline{p} - Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} < p < \overline{p} + Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(0{,}42 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}42.0{,}56}{180}} < p < 0{,}42 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}42.0{,}56}{180}}\right) = 0{,}9$$

$$P(0{,}42 - 0{,}060516 < p < 0{,}42 + 0{,}060516) = 0{,}9$$

$$P(0{,}359 < p < 0{,}481) = 0{,}9$$

Jadi dengan keyakinan sebesar 90% didapatkan bahwa proporsi ibu-ibu yang biasa menyaksikan tayangan iklan paling sedikit 2 jam seminggu berada di antara 35,9 hingga 48,1%

Estimasi Beda dua Proporsi (1/2)

1. Kasus **sampel besar** (n>30) dan atau σ diketahui:

   - Populasi tidak terbatas

$$P\left(\left(\overline{p}_1-\overline{p}_2\right)-d<p<\left(\overline{p}_1-\overline{p}_2\right)+d\right)=1-\alpha$$

$$d=Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\overline{p}_1\left(1-\overline{p}_1\right)}{n_1}+\frac{\overline{p}_2\left(1-\overline{p}_2\right)}{n_2}}$$

   - Populasi terbatas

$$P\left(\left(\overline{p}_1-\overline{p}_2\right)-d<p<\left(\overline{p}_1-\overline{p}_2\right)+d\right)=1-\alpha$$

$$d=Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\overline{p}_1\left(1-\overline{p}_1\right)}{n_1}+\frac{\overline{p}_2\left(1-\overline{p}_2\right)}{n_2}}\sqrt{\frac{\left(N_1+N_2\right)-\left(n_1+n_2\right)}{N_1+N_2-1}}$$

Estimasi Beda dua Proporsi (2/2)

1. Kasus **sampel kecil** (n<30) dan atau σ diketahui:

   - Populasi tidak terbatas

$$P\left(\left(\bar{p}_1-\bar{p}_2\right)-d<p<\left(\bar{p}_1-\bar{p}_2\right)+d\right)=1-\alpha$$

$$d=t_{0,5\alpha;df}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\left(1-\bar{p}_1\right)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\left(1-\bar{p}_2\right)}{n_2}}$$

   - Populasi terbatas

Dengan: $df=n_1+n_2-1$

$$P\left(\left(\bar{p}_1-\bar{p}_2\right)-d<p<\left(\bar{p}_1-\bar{p}_2\right)+d\right)=1-\alpha$$

$$d=t_{0,5\alpha;df}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\left(1-\bar{p}_1\right)}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\left(1-\bar{p}_2\right)}{n_2}}\sqrt{\frac{\left(N_1+N_2\right)-\left(n_1+n_2\right)}{N_1+N_2-1}}$$

- <u>Contoh Soal 4:</u>
  - Untuk mengetahui perbedaan proporsi ketaatan pemilik mobil dalam membayar pajak (PKB) diambil sampel secara acak di kota A dan B. Di Kota A sebanyak 100 pemilik mobil ternyata 72 orang telah melunasi PKB. Di kota B sebanyak 100 pemilik mobil ternyata 66 orang telah melunasi PKB. Tentukan interval keyakinan sebesar 90% untuk mengestimasi beda proporsi pemilik mobil yang taat melunasi pajak di kedua kota tersebut.

Diket:

$$n_1 = 100 \quad X_1 = 72 \quad \bar{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{72}{100} = 0{,}72$$

$$n_2 = 100 \quad X_2 = 66 \quad \bar{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = 66 = 0{,}66$$

$$1 - \alpha = 90\% = 0{,}9$$

Ditanya: $P(.. < p < ..) = 0.9$

Jawab:

$$d = Z_{0,5\alpha}\sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}} = 1{,}645\left(\sqrt{\frac{0{,}72.0{,}28}{100} + \frac{0{,}66.0{,}34}{100}}\right)$$

$$d = 1{,}645.(0{,}065268) = 0{,}107367$$

$$P\big((0{,}72 - 0{,}66) - 0{,}107367 < p < (0{,}72 - 0{,}66) + 0{,}107367\big) = 0{,}9$$

$$P(-0{,}04737 < p < 0{,}16737) = 0{,}9$$

Jadi dengan keyakinan sebesar 90% didapatkan bahwa proporsi pemilik mobil taat bayar pajak di kota A lebih besar dibandingkan dengan di kota B dengan estimasi 4,7% sampai 16,74%

Soal-soal latihan:

1. 150 karyawan sebuah perusahaan dipilih secara acak dan ditanya mengenai besarnya biaya hidup per hari. Ternyata rata-rata pengeluaran adalah sebesar Rp 20.000,- dengan simpangan baku Rp 6.000,- Hitunglah Estimasi interval rata-rata pengeluaran dengan:
   a. level keyakinan 99%
   b. Level leyakinan 90%

2. Selama pengamatan triwulan pertama 2003, standard deviasi dari suku bunga deposito untuk periode 12 bulan adalah 0,73%. Untuk melihat lebih lanjut pergerakan suku bunga, diambil sampel 60 bank dari 138 bank yang ada. Hasilnya, rata-rata suku bunga bank pada 60 bank tersebut adalah 7,72%. Buat interval kepercayaan untuk rata-rata populasi dengan level keyakinan 95%.
3. Sebuah sampel acak yang terdiri dari 100 buruh tani, ternyata sebanyak 64 buruh tani tersebut adalah juga sebagai pemilik tanah. Dengan level keyakinan 95^ tentukan interval kepercayaan untuk mengestimasi proporsi buruh tani yang juga sebagai pemilik tanah.
4. Dua sampel acak masing-masing terdiri dari 700 mahasiswa dan 500 mahasiswi mengunjungi bazaar buku murah. Dari survey, terdapat 392 mahasiswa dan 325 mahasiswa yang merasa puas dengan adanya bazaar tersebut. Dengan level keyakinan 98% tentukan interval kepeprcayaan untuk mengestimasi tingkat kepuasan mahasiswa dan mahasiswa yang mengunjungi bazaar buku murah tersebut.