Distribusi Uniform

- Mean dari distribusi uniform:

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Varians dari distribusi uniform:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribusi Uniform

- **Fungsi Distribusi Kumulatif** (*cdf*) dari distribusi uniform dinyatakan sebagai:

$$F\left(x\right)=\begin{cases} 0; & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}; & a < x < b \\ 1; & x \ge b \end{cases}$$

- <u>Contoh 3:</u>

  Jika waktu seseorang menunggu datangnya pesawat disebuah bandara antara jam 08.00-10.00 berdistribusi uniform. Hitung berapa probabilitas seseorang harus menunggu

  a. Kurang atau sama dengan 30 menit dari jam 08.00?
  b. Lebih dari 30 Menit

Jawab:

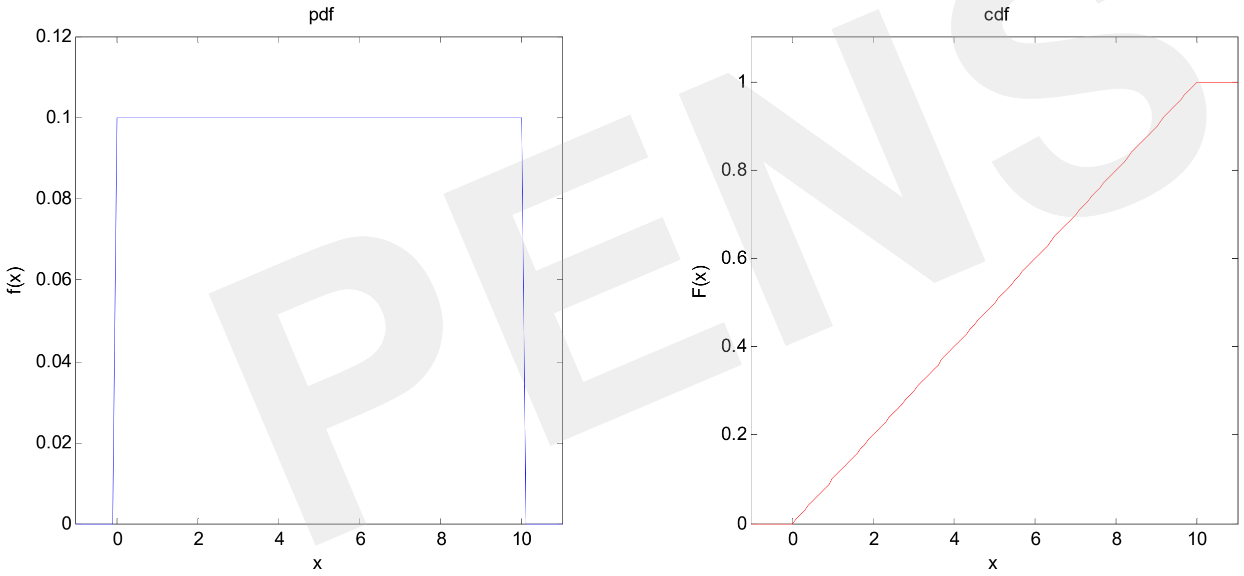
a. Waktu 08.00 – 10.00 adalah 120 menit, maka

$$P(X \leq 30) = \int_0^{120} \frac{1}{120-0} dx = 0,25$$

b. .

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= 1 - P(X \leq 30) \\ &= 1 - 0,25 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

- <u>Contoh 4:</u>
  - Dapatkan grafik pdf dan cdf dari sekelompok bilangan dalam interval (0,10). Berapa mean dan varians nya ?



$$\mu = \frac{10-0}{2} = 5; \quad \sigma^2 = \frac{10^2}{12} = 8,33$$

Distribusi Eksponensial

- Digunakan untuk memodelkan jumlahan waktu hingga kemunculan sebuah event tertentu, atau memodelkan waktu di antara event-event yang saling independen
- Beberapa aplikasi distribusi eksponensial:

  pemodelan waktu hingga komputer log off, pemodelan waktu antara waktu kedatangan panggilan telepon, dan pemodelan waktu lainnya.

Distribusi Eksponensial

- Fungsi kerapatan probabilitas (*pdf*) dari distribusi eksponensial, dinyatakan sebagai sbb:

$$\boxed{f(x \mid \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x \geq 0; \quad \lambda > 0 \\ 0; & x \text{ lainnya} \end{cases}}$$

- Mean dari distribusi variabel acak eksponensial dinyatakan sebagai:

$$E[X] = \mu = \frac{1}{\lambda}$$

- variance sbb:

$$V[X] = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribusi Eksponensial

- Fungsi Distribusi Kumulatif (cdf) dari distribusi eksponensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \end{cases}}$$

- Jika distribusi eksponensial digunakan untuk merepresentasikan waktu antar kedatangan (*inter arrival time*), maka parameter λ adalah sebuah kecepatan dengan satuan kedatangan per periode waktu.

- <u>Contoh 5:</u>

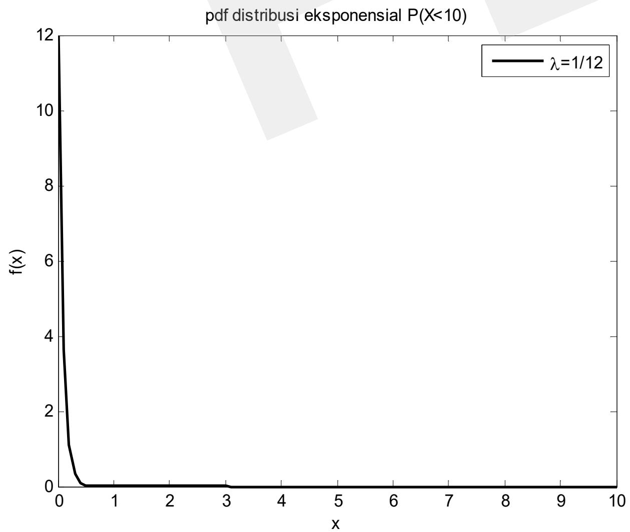
Waktu kedatangan busway pada sebuah halte interseksi mengikuti distribusi eksponensial dengan mean 12 detik.

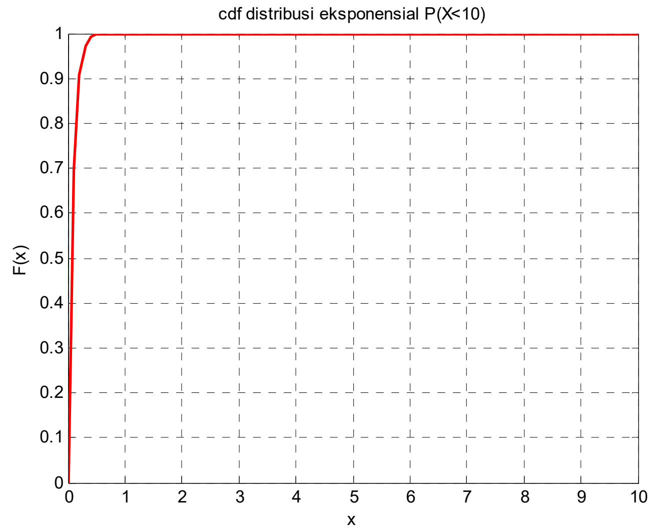
Berapa probabilitas dimana waktu antar kedatangan adalah 10 detik atau kurang ? Gambarkan grafik pdf dan cdf –nya.

Jawab:

Rata-rata interarrival time (waktu kedatangan)=12, jadi $\lambda = \dfrac{1}{12}$

Sehingga: $P\left(X \leq 10\right) = 1 - e^{-(1/12)10} \approx 0,57$





Distribusi Gamma

- Pdf dari distribusi probabilitas Gamma dinyatakan sebagai:

$$f\left(x;\lambda,t\right)=\frac{\lambda e^{-\lambda x}\left(\lambda x\right)^{t-1}}{\Gamma\left(t\right)};\quad x\geq 0$$

t = parameter bentuk
λ = parameter skala

- Fungsi gamma $\Gamma(t)$ dinyatakan sebagai:

$$\Gamma\left(t\right)=\int_0^\infty e^{-y}y^{t-1}dy$$

- Untuk nilai-nilai integer, fungsi ini menjadi $\Gamma\left(t-1\right)!$
- Distribusi ini memiliki hubungan yang erat dengan distribusi eksponensia, karena jika $t=1$ maka distribusi ini menjadi distribusi exponensial

Distribusi Gamma

- Mean dari distribusi probabilitas gamma:

$$E(X) = \frac{t}{\lambda}$$

- Variance dari distribusi probabilitas gamma:

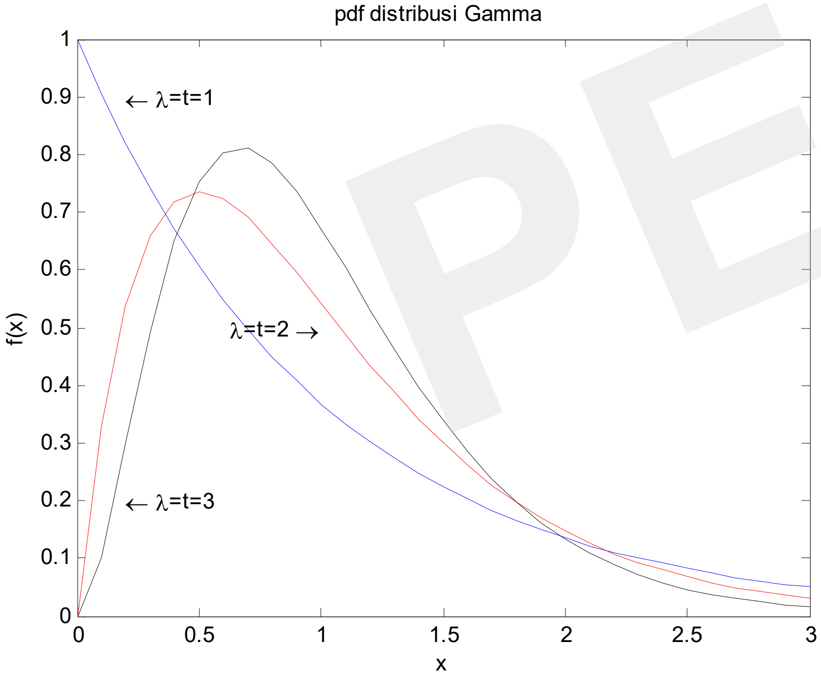
$$V(X) = \frac{t}{\lambda^2}$$

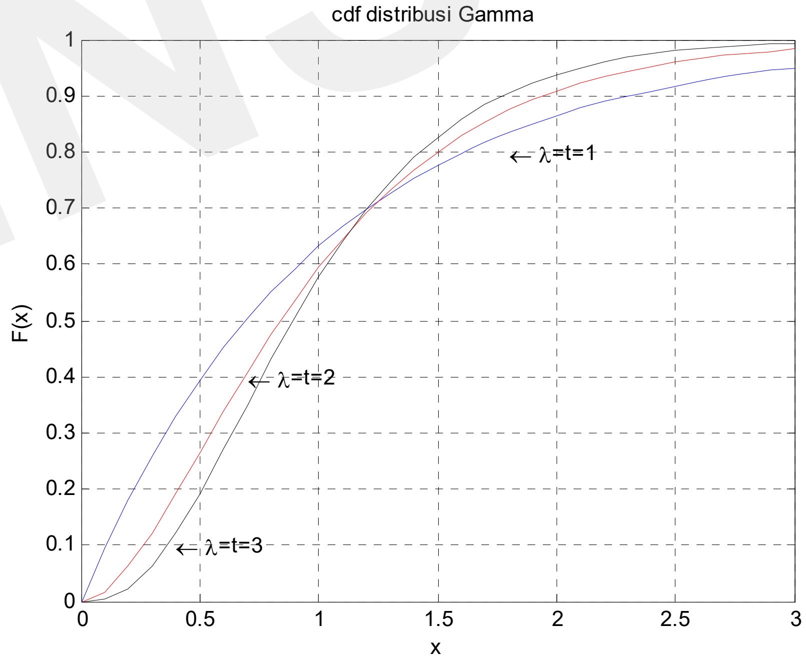
- Fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari distribusi gamma:

$$\boxed{F(x;\lambda,t) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(t)} \displaystyle\int_0^{\lambda x} y^{t-1} e^{-y}\, dy; & x > 0 \end{cases}}$$

- <u>Contoh 6:</u>

Gambarkan grafik fungsi kepadatan probabilitas dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi gamma untuk $\lambda = t$ yang masing-masing bernilai 1,2 dan 3.





Distribusi Chi-Square

- Distribusi ini banyak digunakan untuk menganalisa secara statistik data hasil pengujian terhadap data-data teoritisnya.
- Distribusi chi-square digunakan untuk menu-runkan distribusi varians sampel dan perlu untuk pengetesan goodness-of-fit
- Dalam distribusi Chi-Square ada parameter yang disebut derajat kebebasan, *v*.
- Dengan $\lambda = 0,5$ dan $t = v/2$ maka distribusi gamma menjadi distribusi chi-square.

Distribusi Chi-Square

- Pdf dari variabel acak terdistribusi chi-square dengan derajat kebebasan *v* adalah:

$$\boxed{f(x;v) = \frac{1}{\Gamma(v/2)}\left(\frac{1}{2^{v/2}}\right) x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; \qquad x \geq 0}$$

- Mean dari variabel acak terdistribusi Chi-Square adalah:

$$E[X] = v$$

- Varians dari variabel acak terdistribusi Chi-Square :

$$V[X] = 2v$$

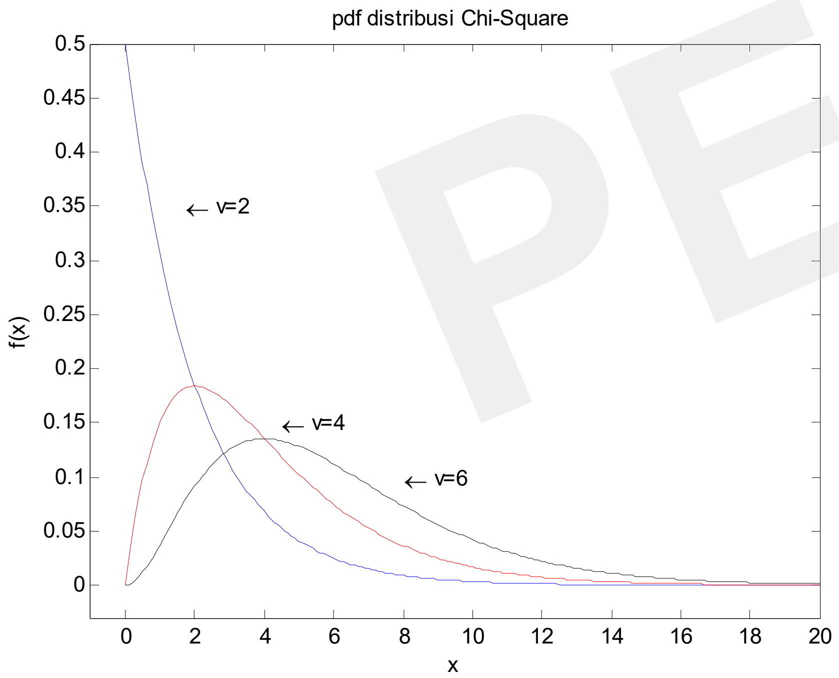
Distribusi Chi-Square

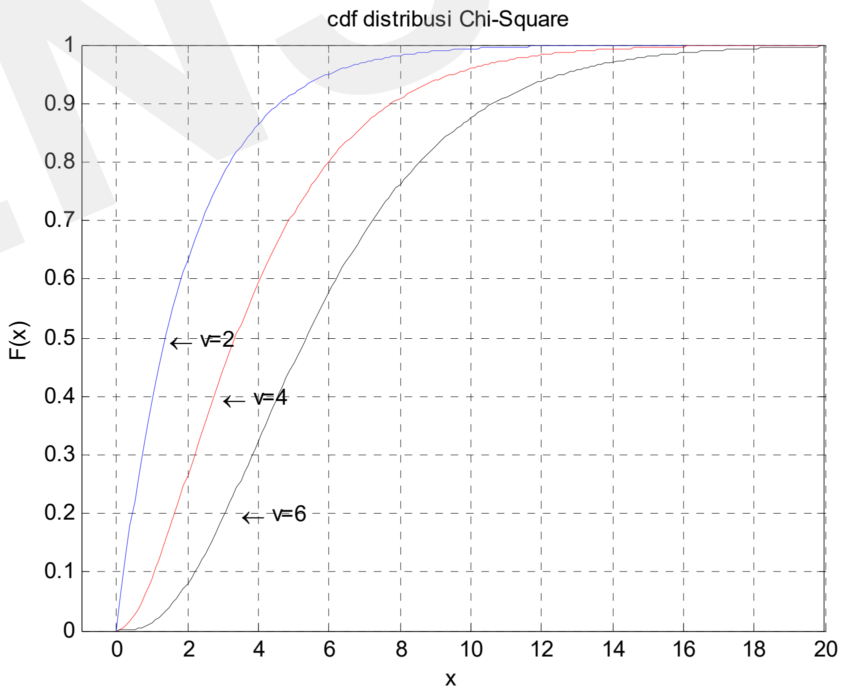
- Fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari distribusi Chi-Square adalah:

$$F(x;v) = \begin{cases} 0; & x < 0^{v/2} \\ \int_0^{\lambda} \dfrac{y^{(v-2)/2} e^{-y/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} dy & x \geq 0 \end{cases}$$

- <u>Contoh 7:</u>

Gambarkan grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi Chi-Square untuk v yang bernilai 2,4 dan 6.





Distribusi Weibull

- Distribusi Weibull banyak digunakan dalam bidang rekayasa, seperti pada analisa reliabilitas (keandalan) dan pengujian panjang umur (*life testing*) suatu komponen. Misal: analisa jumlah waktu yang diperlukan sampai sebuah komponen mengalami kegagalan.
- Pada $v = 0$ dan $\beta = 1$ distribusi Weibull akan sama dengan distribusi eksponensial dengan $\lambda = 1/\alpha$

Distribusi Weibull

- Pdf dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$f(x;v,\alpha,\beta)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta}}\;;\quad x>v,\alpha>0,\beta>0$$

- Mean dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$E[X]=v+\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

- Variance dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$V[X]=\alpha^{2}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^{2}\right\}$$

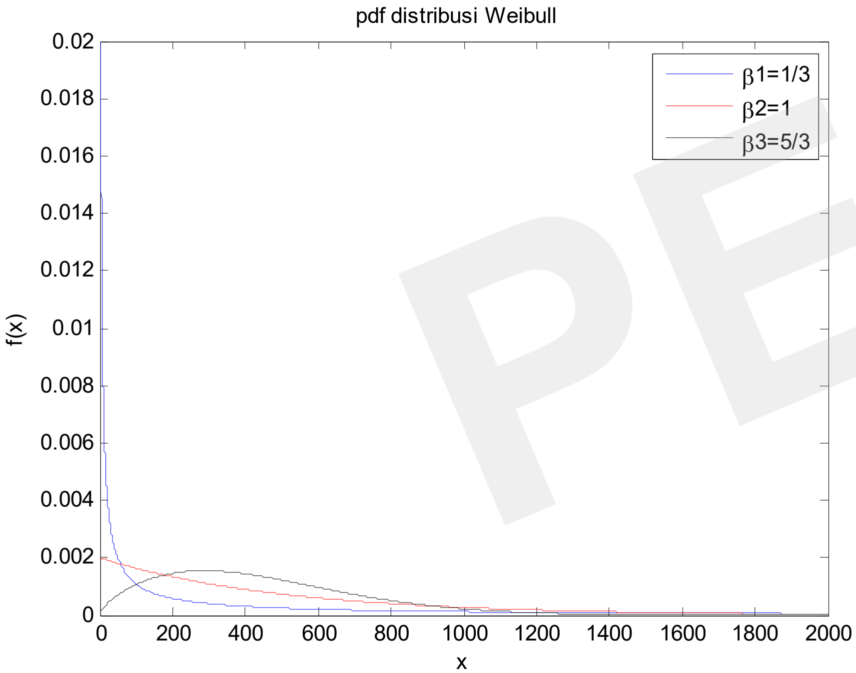
Distribusi Weibull

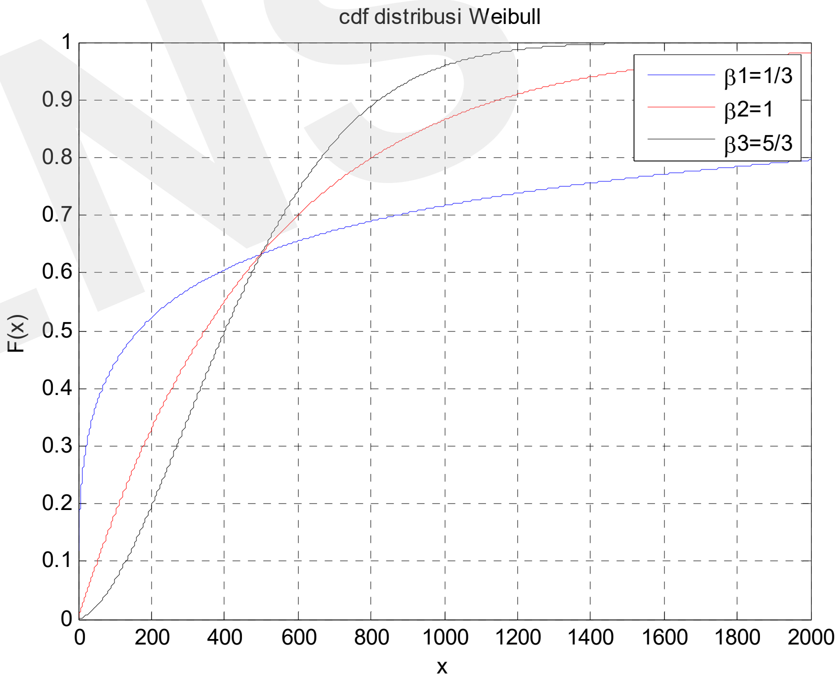
- Fungsi distribusi kumulatif dari variabek acak terdistribusi Weibull adalah:

$$F\left(x;v,\alpha,\beta\right)=\begin{cases} 0; & x \le v \\ 1-e^{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta}}; & x > v \end{cases}$$

• <u>Contoh 11:</u>

Gambarkan grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi Weibull untuk alfa=500 dan beta=1/3, 1 dan 5/3.





Distribusi Normal

1. Sekumpulan nilai data kontinyu akan terdistribusi secara normal (membentuk kurva simetris) apabila rata-rata nilai variabel sama dengan median, dan sama dengan modus dari nilai-nilai data tersebut.
2. Distribusi normal mempunyai bentuk kurva seperti bel (*bell shape*).
3. Distribusi normal disebut juga distribusi Gauss (*Gaussian Distribution*)
4. Pada distribusi normal, rata-rata populasi membagi luasan kurva menjadi dua sama banyak, luas daerah sebelah kiri = 0,5 dan sebelah kanan = 0,5, total luas daerah =1.
5. Suatu distribusi dikatakan normal jika kurang lebih 68% data observasi berada di dalam satu standard deviasi, atau kurang lebih 95% data observasi berada dalam dua standard deviasi

Distribusi Normal

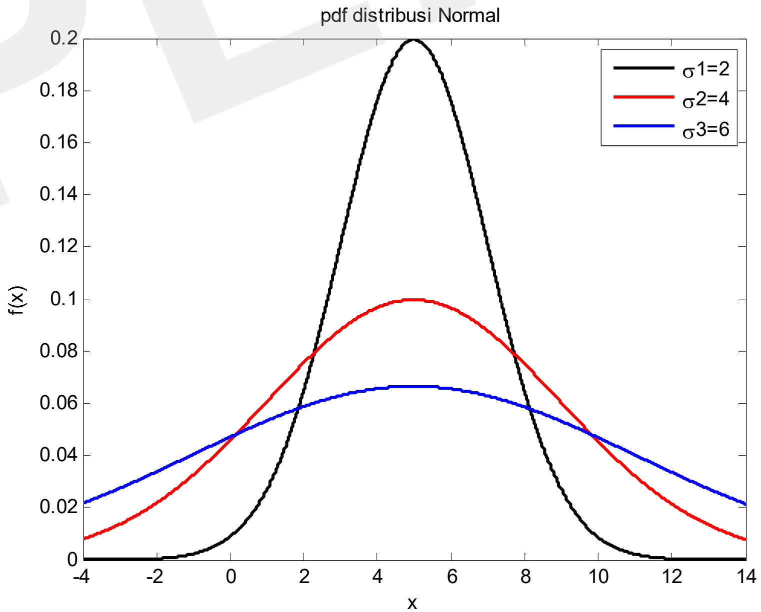
- Distribusi normal dengan parameter mean, μ dan varians σ^2 biasanya ditulis sebagai $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$
- Pdf dari variabel acak terdistribusi normal dinyatakan sebagai:

$$f\left(x \mid \mu,\sigma\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ = mean populasi
σ = standard deviasi (simpangan baku) populasi
π = konstanta 3,14159
e = konstanta 2,7182

Distribusi Normal

- Nilai σ pada distribusi normal menyatakan besarnya sebaran dari populasinya, semakin besar simpangan baku, σ sebaran data semakin menjauhi rata-rata μ nya, sebaliknya jika σ kecil maka sebaran data mendekat rata-ratanya.



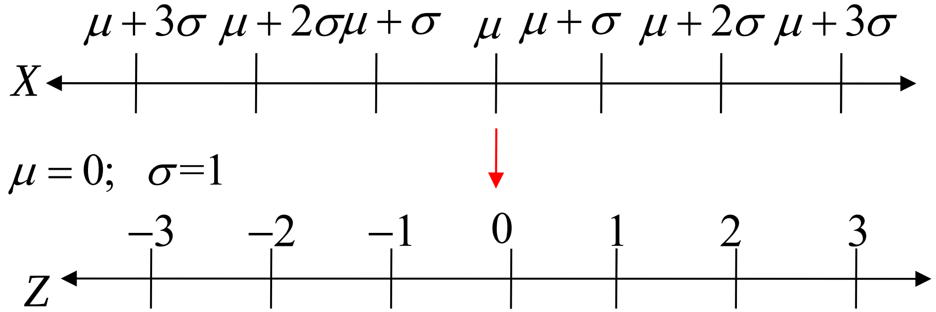
Distribusi Normal

- Sifat-sifat Distribusi Normal
  1. Grafik simetris terhadap garis tegak $x = \mu$
  2. Grafik selalu berada di atas sumbu x, $f(x) > 0$
  3. Mempunyai satu nilai modus
  4. Luas daerah di bawah kurva $f(x)$ dan di atas sumbu x memiliki nilai: $P(-\infty < x < +\infty) = 1$

Distribusi Normal

- <u>Probabilitas</u> $\underline{P(a<x<b)}$
  - Probabilitas ini dapat ditentukan di bawah *kurva f(x)* dengan penyelesaian integral $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$
  - Namun penyelesaian dengan integral membutuhkan proses yang rumit.
  - Untuk itu diselesaikan dengan mentransformasikan nilai-nilai x menjadi nilai-nilai baku Z, dengan persamaan:

$$\boxed{Z=\frac{x-\mu}{\sigma}}$$

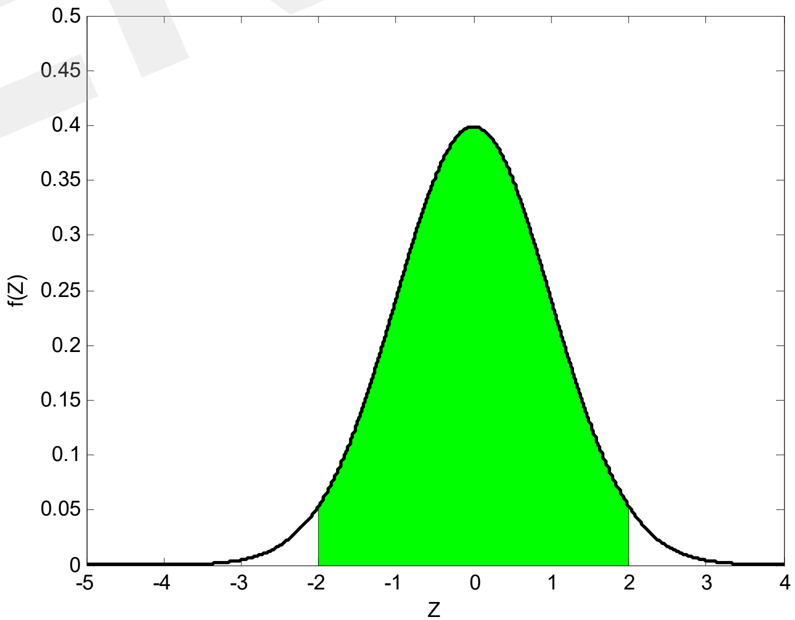


Distribusi Normal

- Setelah itu gunakan Tabel Distribusi Normal Standard (terlampir) untuk mendapatkan probabilitas dari nilai Z .
  - <u>Contoh:</u>

    Luasan berwarna hijau adalah pdf dari

    $P(-2 < Z < 2)$

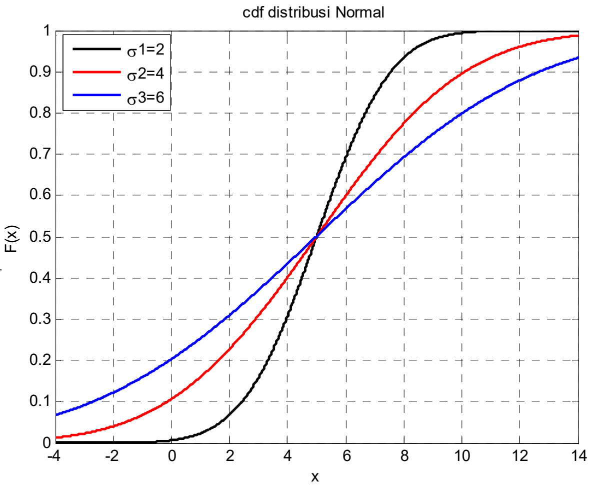


Distribusi Normal

- Fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari distribusi normal:

$$F(x \mid \mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- Sifat-sifat *cdf* dari distribusi normal:
  1. F(x) monoton naik
  2. $0 \le F(x) \le 1$
  3. $F(-\infty) = \lim_{X\to\infty} F(x) = 0$ dan $F(+\infty) = \lim_{X\to\infty} F(x) = 1$



- <u>Contoh 12:</u>

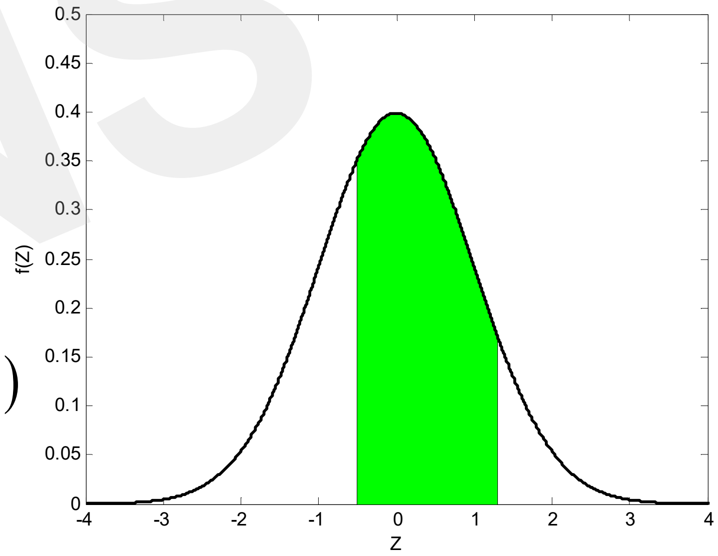
Bila X adalah variabel acak berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu = 25$ dan simpangan baku $\sigma = 10$, tentukan probabilitas $P(20 < X < 38)$ Gambarkan kurva pdf nya.

Jawab:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{20-25}{10} = -0,5$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{38-25}{10} = 1,3 \text{ sehingga:}$$

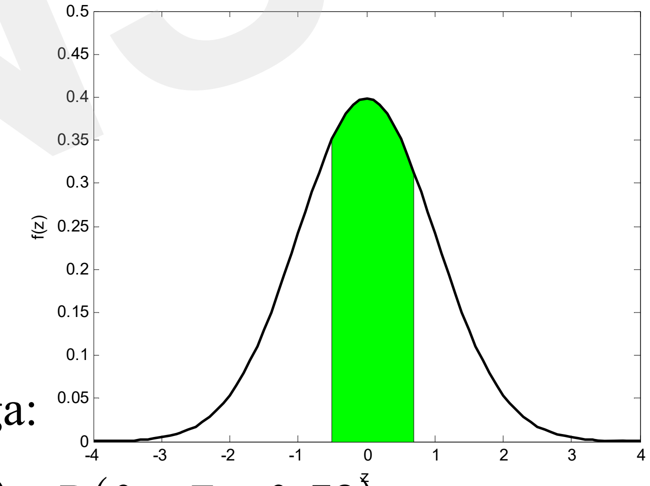
$$\begin{aligned} P(-0,5 < Z < 1,3) &= P(-0,5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1,3) \\ &= P(0 < Z < 0,5) + P(0 < Z < 1,3) \\ &= 0,1915 + 0,4032 \\ &= 0,5947 \end{aligned}$$



- <u>Contoh 13:</u>

  Sebuah perusahaan memproduksi panci presto yang memiliki ketahanan berdistribusi normal dengan rata-rata 825 hari dan simpangan baku 45 hari. Ditanyakan:

  a. Berapa persen panci yng memiliki ketahanan antara 800 dan 860 hari ?
  b. Berapa banyak panci yang ketahanannya lebih dari 950 hari jika diproduksi 5000 panci ?



Jawab:

a) $\mu = 825 \quad \sigma = 45$

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{800 - 825}{45} = -0,55$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{860 - 825}{45} = 0,78 \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} P(-0,55 < Z < 0,78) &= P(-0,55 < Z < 0) + P(0 < Z < 0,78) \\ &= P(0 < Z < 0,55) + P(0 < Z < 0,78) \\ &= 0,2088 + 0,2823 \\ &= 0,4911 \end{aligned}$$

Jadi ada 49,11% panci yang punya ketahanan antara 800 dan 860 hari

b) $X_3 > 950$

$$Z_3 = \frac{X_3 - \mu}{\sigma} = \frac{950 - 825}{45} = 2,78$$

sehingga:

$$P(Z > 2,78) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 2,78)$$
$$= 0,5 - 0,4973$$
$$= 0,0027$$

Untuk 5000 panci, terdapat 0,0027x5000=13,5 atau 14 panci yang punya ketahanan antara 800 dan 860 hari