



Probability and Random Process

Topik 5. Beberapa jenis Distribusi
Variabel Acak

Prima Kristalina
April 2015

Outline

1. Beberapa macam Distribusi Variabel Acak Khusus
2. Distribusi Variabel Acak Diskrit: Binomial, Poisson
3. Distribusi Variabel Acak Kontinyu: Uniform, Normal, Eksponensial, Gamma, Chi-Square
4. Pemakaian tabel distribusi normal baku

Beberapa Macam Distribusi Probabilitas

- **Distribusi Probabilitas Variabel Diskrit:**
 - Distribusi Binomial
 - Distribusi Geometrik
 - Distribusi Hypergeometrik
 - Distribusi Poisson
- **Distribusi Probabilitas Variabel Kontinyu:**
 - Distribusi Uniform
 - Distribusi Gamma
 - Distribusi Eksponensial
 - Distribusi Weibull
 - Distribusi Normal
 - Distribusi Chi Square

Distribusi Binomial

- Distribusi ini hanya mengenal dua keadaan, yaitu berhasil atau gagal.
- Distribusi ini sering disebut juga sebagai proses Bernoulli (*Bernoulli trials*).
- Ciri-ciri proses Bernoulli:
 1. Ada dua kejadian yang bisa terjadi dan saling asing pada setiap percobaan, yaitu: sukses dan gagal.
 2. Urutan dari percobaan tersebut merupakan kejadian independen
 3. Probabilitas sukses dinyatakan sebagai p , dimana nilai p ini tetap dari satu percobaan ke percobaan berikutnya atau dari satu kejadian ke kejadian lainnya.

Distribusi Binomial

- Ada tiga nilai yang diperlukan dalam proses Bernoulli: jumlah percobaan, n dimana setiap hasil keluaran saling independen, jumlah keberhasilan, X dan p yang menyatakan probabilitas keberhasilan dari X .
- Distribusi Binomial dapat dinyatakan dengan persamaan kombinasi sbb:

$$f(x|n, p) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

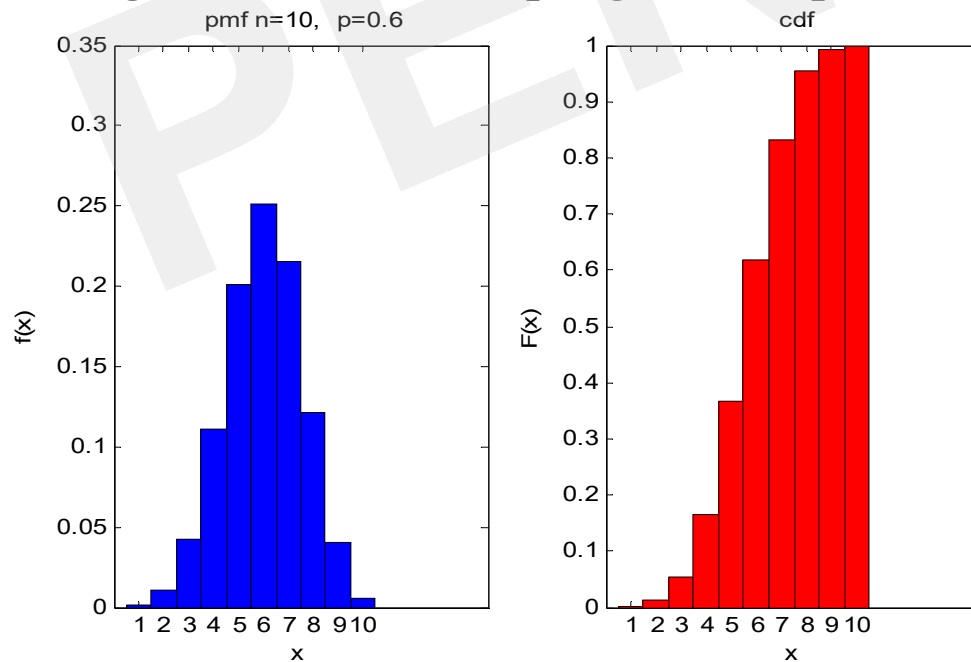
Distribusi Binomial

- Nilai mean dan varians dari distribusi Binomial ditentukan oleh berbagai peristiwa yang dihasilkan dari percobaan Binomial.
- Jika sebuah variabel X terdiri dari n percobaan, dimana: $X = L_1 + L_2 + \dots + L_n$
- maka mean dari populasi distribusi Binomial dinyatakan sbb: $\mu = E[X] = E(L_1) + E(L_2) + \dots + E(L_n)$
 $= p + p + \dots + p = n.p$
- Varians dari total populasi distribusi binomial dinyatakan sbb: $\sigma^2 = V[X] = \sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2 + \dots + \sigma_{L_n}^2$
 $= p.q + p.q + \dots + p.q = n.p.q$

- Contoh 1:

Dari hasil penelitian didapatkan bahwa probabilitas seseorang untuk sembuh dari sakit antrax dengan pemberian obat tertentu adalah 60%. Jika diambil 10 orang yang terjangkit penyakit secara acak, hitung:

- a. Probabilitas tidak lebih dari 3 orang untuk sembuh
- b. Probabilitas sedikitnya 5 orang untuk sembuh
- c. Hitung rata-rata dan simpangan baku pasien sembuh



- Jawab:

$$n = 10, p = 0,6 \quad q = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$\begin{aligned} \text{a. } P(X \leq 3) &= \sum_0^3 f(x:10,0.6) \\ &= f(0:10,0.6) + f(1:10,0.6) + f(2:10,0.6) + f(3:10,0.6) \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^8 + \binom{10}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^7 \\ &= 0,0001 + 0,0016 + 0,0106 + 0,0425 = 0,0548 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } P(X \geq 5) &= 1 - \left(\sum_0^3 f(x:10,0.6) + f(4:10,0.6) \right) \\ &= 1 - (0,0548 + 0,0159) = 0,929 \end{aligned}$$

$$\text{c. Rata-rata populasi: } \mu = n \cdot p = 10 \times 0,6 = 6$$

$$\text{Simpanan baku: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \times 0,6 \times 0,4} = 1,55$$

Distribusi Poisson

- Distribusi ini efektif digunakan untuk n jumlah pengamatan yang sangat besar, sementara probabilitas satu kejadian, p sangat kecil (biasanya jauh di bawah 0,5)
- Contoh penggunaan distribusi Poisson a.l: pendudukan trafik telepon dalam satu jam pada sentral telepon, banyaknya kesalahan ketik dalam satu halaman laporan, jumlah cacat pada motif selembur kain

Distribusi Poisson

- Ciri-ciri percobaan Poisson:
 1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang tertentu atau daerah tertentu tidak bergantung pada selang atau daerah lain
 2. Probabilitas terjadinya satu hasil percobaan selama selang waktu yang singkat sekali atau daerah yang kecil sebanding dengan selang waktu atau daerah yang lain, juga tidak bergantung pada banyaknya percobaan yang terjadi di luar selang waktu atau daerah yang lain tersebut
 3. Probabilitas bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat atau daerah yang kecil bisa diabaikan.

Distribusi Poisson

μ = banyaknya sukses yang diharapkan
 e = konstanta yang nilainya mendekati 2,71828
 x = banyaknya sukses setiap unit
 λ = rata-rata dari seluruh nilai sukses

Distribusi Binomial biasanya dinyatakan sbb:

$$f(x|n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-x+1)}{x!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

karena $\mu = n \cdot p$ atau $p = \frac{\mu}{n}$ maka:

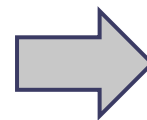
$$f(x|n, p) = \underbrace{\binom{n}{n} \binom{n-1}{n} \binom{n-2}{n} \dots \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x}}_{= 1} \left(\frac{\mu^x}{x!}\right) \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

pada $n = \infty$, limit dari persamaan di atas kurung = 1, sehingga tinggal:

$$f(x|n, p) = \left(\frac{\mu^x}{x!}\right) \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

untuk persamaan paling kanan: $\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-(-n/\mu)\mu} = e^{-\mu}$

sehingga: $f(x|\lambda) = \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right) \cdot e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$



Distribusi Poisson

Distribusi Poisson

- Mean dan varians dari distribusi Poisson dinyatakan sbb:

$$E[X] = \lambda \quad V[X] = \lambda$$

- Fungsi distribusi kumulatif (cdf) dari Poisson dinyatakan sebagai:

$$F(x | \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\text{floor}(x)} \frac{\lambda^i}{i!}$$

- Contoh 2:

- Polisi Resor Surabaya Barat mencatat rata-rata tertangkap 5 orang dalam kasus psikotropika dalam sebulan. Hitung probabilitas bahwa pada satu bulan tertentu orang yang terlibat kasus ini adalah:

- a. Tepat 5 orang
- b. Kurang dari 5 orang
- c. Antara 5 sampai 9 orang

- **Jawab:** a. $p(X = 5, \lambda = 5) = \frac{e^{-5} 5^5}{5!} = 0,1755$

- b.
$$p(X < 5, \lambda) = \sum_0^4 \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = p(0,5) + p(1,5) + p(2,5) + p(3,5) + p(4,5)$$
$$= \frac{e^{-5} 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} 5^2}{2!} + \frac{e^{-5} 5^3}{3!} + \frac{e^{-5} 5^4}{4!}$$
$$= 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 + 0,1404 + 0,1755 = 0,4405$$

- c.
$$p(5 \leq X \leq 9, \mu) = \sum_0^9 \frac{e^{-5} 5^x}{x!} - \sum_0^4 \frac{e^{-5} 5^x}{x!}$$
$$= 0,9682 - 0,4405 = 0,5277$$

Distribusi Uniform

- Merupakan jenis distribusi variabel acak kontinyu
- Pada distribusi ini setiap variabel acak yang muncul memiliki probabilitas yang sama, dimana:

$$f(x|k) = \frac{1}{k}; \text{ untuk } x_1, x_2, \dots, x_k$$

- Jika nilai dari variabel acak tersebut tersebar pada sebuah interval (a,b), maka pdf dari distribusi uniform dinyatakan sebagai:

$$f(x|a,b) = \frac{1}{b-a}; \quad a < x < b$$

Distribusi Uniform

- Mean dari distribusi uniform:

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Varians dari distribusi uniform:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribusi Uniform

- **Fungsi Distribusi Kumulatif (*cdf*)** dari distribusi uniform dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a < x < b \\ 1; & x \geq b \end{cases}$$

- Contoh 3:

Jika waktu seseorang menunggu datangnya pesawat di sebuah bandara antara jam 08.00-10.00 berdistribusi uniform. Hitung berapa probabilitas seseorang harus menunggu

- a. Kurang atau sama dengan 30 menit dari jam 08.00?
- b. Lebih dari 30 Menit

Jawab:

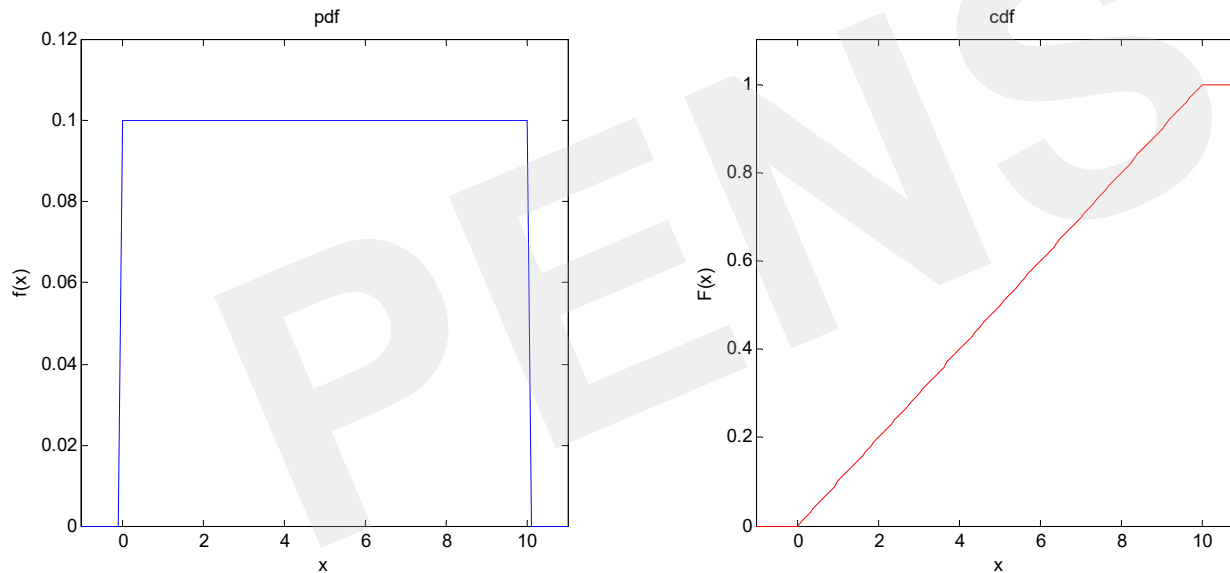
- a. Waktu 08.00 – 10.00 adalah 120 menit, maka

$$P(X \leq 30) = \int_0^{30} \frac{1}{120-0} dx = 0,25$$

- b. . $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30)$
 $= 1 - 0,25$
 $= 0,75$

- Contoh 4:

- Dapatkan grafik pdf dan cdf dari sekelompok bilangan dalam interval (0,10). Berapa mean dan varians nya ?



$$\mu = \frac{10-0}{2} = 5; \quad \sigma^2 = \frac{10^2}{12} = 8,33$$

Distribusi Eksponensial

- Digunakan untuk memodelkan jumlahan waktu hingga kemunculan sebuah event tertentu, atau memodelkan waktu di antara event-event yang saling independen
- Beberapa aplikasi distribusi eksponensial:
 - pemodelan waktu hingga komputer log off, pemodelan waktu antara waktu kedatangan panggilan telepon, dan pemodelan waktu lainnya.

Distribusi Eksponensial

- Fungsi kerapatan probabilitas (*pdf*) dari distribusi eksponensial, dinyatakan sebagai sbb:

$$f(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x \geq 0; \lambda > 0 \\ 0; & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Mean dari distribusi variabel acak eksponensial dinyatakan sebagai:

$$E[X] = \mu = \frac{1}{\lambda}$$

- variance sbb:

$$V[X] = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribusi Eksponensial

- Fungsi Distribusi Kumulatif (cdf) dari distribusi eksponensial dinyatakan sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \end{cases}$$

- Jika distribusi eksponensial digunakan untuk merepresentasikan waktu antar kedatangan (*inter arrival time*), maka parameter λ adalah sebuah kecepatan dengan satuan kedatangan per periode waktu.

- Contoh 5:

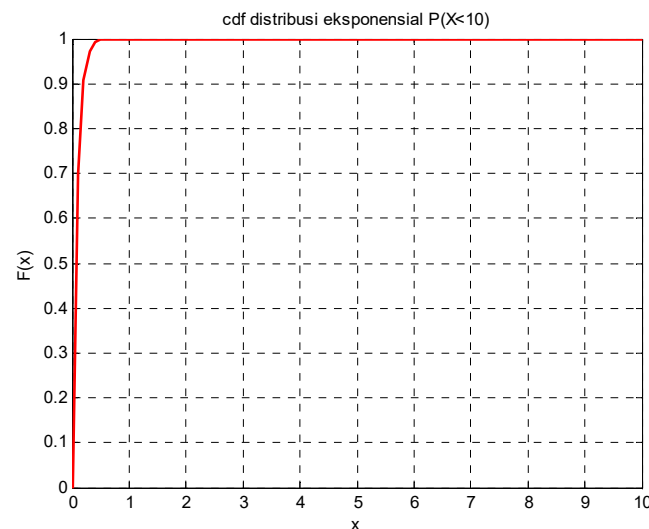
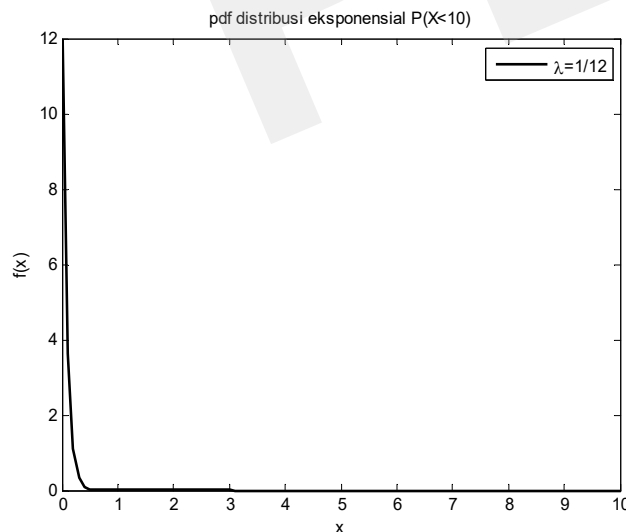
Waktu kedatangan busway pada sebuah halte interseksi mengikuti distribusi eksponensial dengan mean 12 detik.

Berapa probabilitas dimana waktu antar kedatangan adalah 10 detik atau kurang ? Gambarkan grafik pdf dan cdf -nya.

Jawab:

Rata-rata interarrival time (waktu kedatangan)=12, jadi $\lambda = \frac{1}{12}$

Sehingga: $P(X \leq 10) = 1 - e^{-(1/12)10} \approx 0,57$



Distribusi Gamma

- Pdf dari distribusi probabilitas Gamma dinyatakan sebagai:

$$f(x; \lambda, t) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)}; \quad x \geq 0$$

t = parameter bentuk
λ = parameter skala

- Fungsi gamma $\Gamma(t)$ dinyatakan sebagai:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{t-1} dy$$

- Untuk nilai-nilai integer, fungsi ini menjadi $\Gamma(t-1)!$
- Distribusi ini memiliki hubungan yang erat dengan distribusi eksponensia, karena jika $t = 1$ maka distribusi ini menjadi distribusi eksponensial

Distribusi Gamma

- Mean dari distribusi probabilitas gamma:

$$E(X) = \frac{t}{\lambda}$$

- Variance dari distribusi probabilitas gamma:

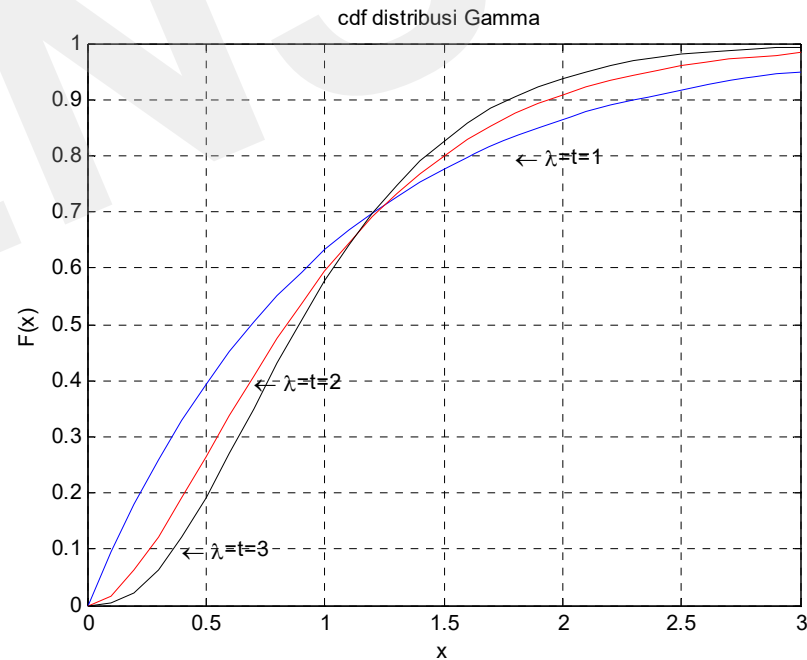
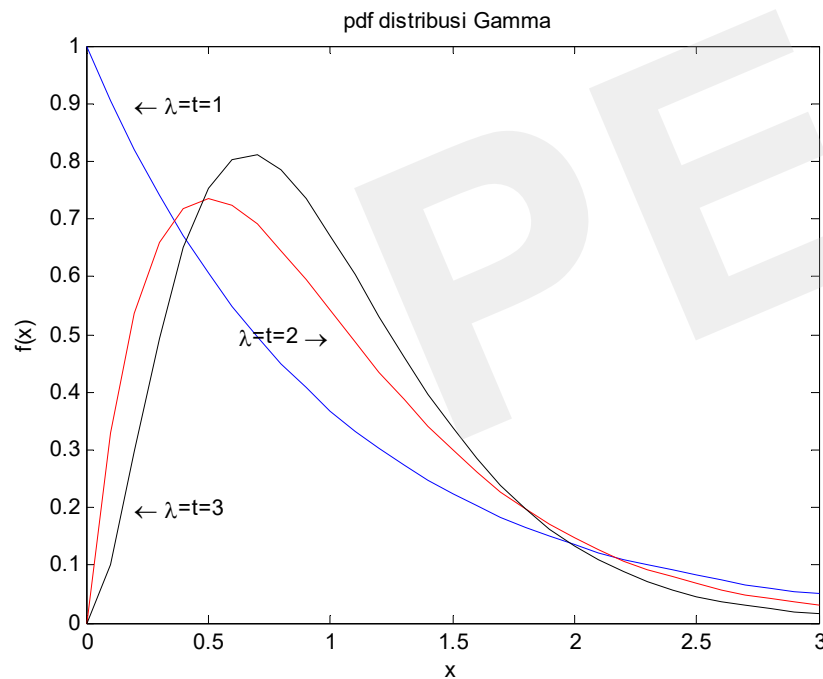
$$V(X) = \frac{t}{\lambda^2}$$

- Fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari distribusi gamma:

$$F(x; \lambda, t) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{\lambda x} y^{t-1} e^{-y} dy; & x > 0 \end{cases}$$

- Contoh 6:

Gambarkan grafik fungsi kepadatan probabilitas dan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi gamma untuk $\lambda = t$ yang masing-masing bernilai 1,2 dan 3.



Distribusi Chi-Square

- Distribusi ini banyak digunakan untuk menganalisa secara statistik data hasil pengujian terhadap data-data teoritisnya.
- Distribusi chi-square digunakan untuk menurunkan distribusi varians sampel dan perlu untuk pengujian goodness-of-fit
- Dalam distribusi Chi-Square ada parameter yang disebut derajat kebebasan, ν .
- Dengan $\lambda = 0,5$ dan $t = \nu/2$ maka distribusi gamma menjadi distribusi chi-square.

Distribusi Chi-Square

- Pdf dari variabel acak terdistribusi chi-square dengan derajat kebebasan ν adalah:

$$f(x; \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{1}{2^{\nu/2}} \right) x^{\nu/2-1} e^{-x/2}; \quad x \geq 0$$

- Mean dari variabel acak terdistribusi Chi-Square adalah:

$$E[X] = \nu$$

- Varians dari variabel acak terdistribusi Chi-Square :

$$V[X] = 2\nu$$

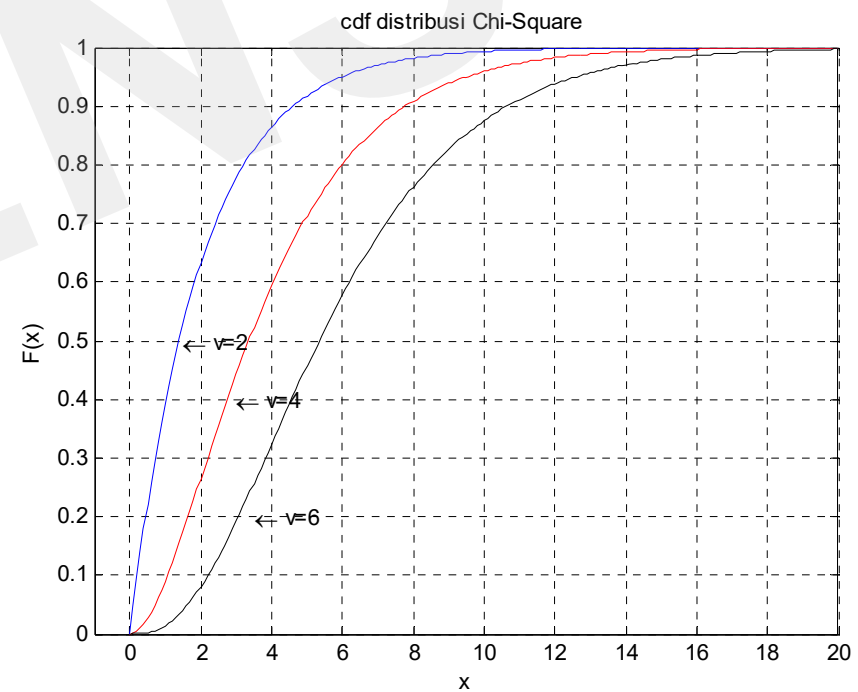
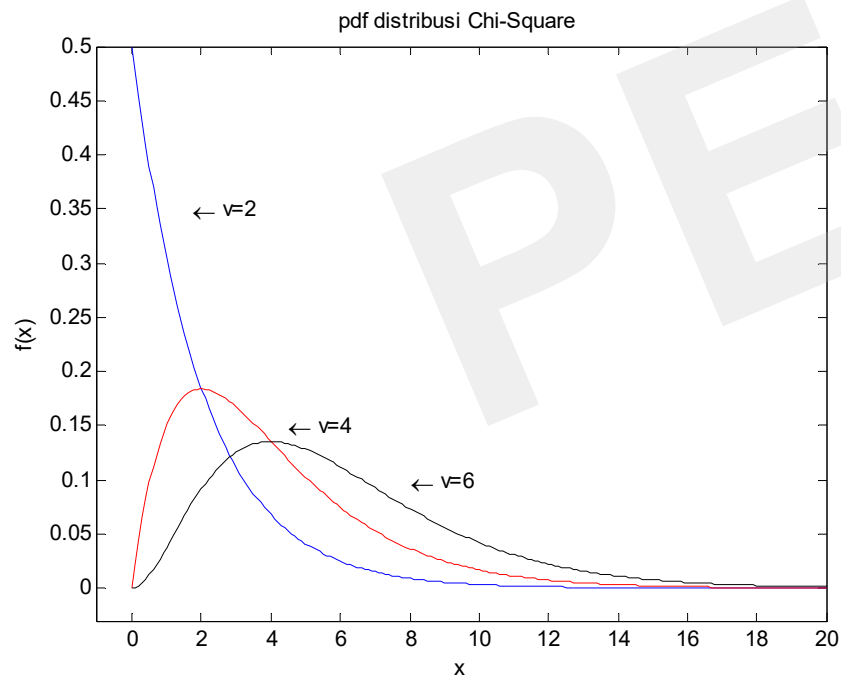
Distribusi Chi-Square

- Fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari distribusi Chi-Square adalah:

$$F(x; \nu) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \int_0^x \frac{y^{(\nu-2)/2} e^{-y/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} dy & x \geq 0 \end{cases}$$

- Contoh 7:

Gambarkan grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi Chi-Square untuk v yang bernilai 2, 4 dan 6.



Distribusi Weibull

- Distribusi Weibull banyak digunakan dalam bidang rekayasa, seperti pada analisa reliabilitas (keandalan) dan pengujian panjang umur (*life testing*) suatu komponen. Misal: analisa jumlah waktu yang diperlukan sampai sebuah komponen mengalami kegagalan.
- Pada $\nu = 0$ dan $\beta = 1$ distribusi Weibull akan sama dengan distribusi eksponensial dengan $\lambda = 1/\alpha$

Distribusi Weibull

- Pdf dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$f(x; v, \alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-v}{\alpha}\right)^\beta}; \quad x > v, \alpha > 0, \beta > 0$$

- Mean dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$E[X] = v + \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

- Variance dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$V[X] = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$$

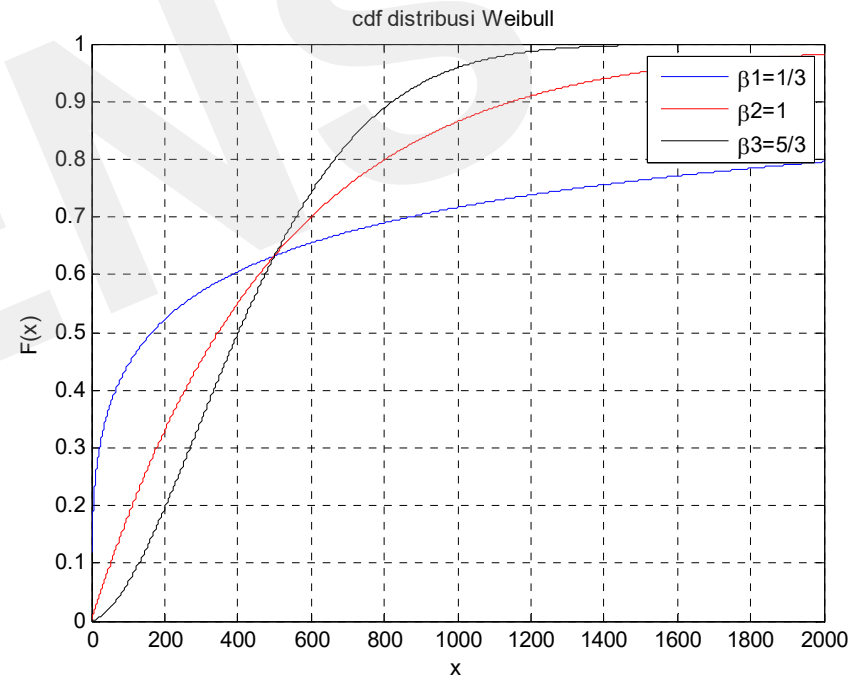
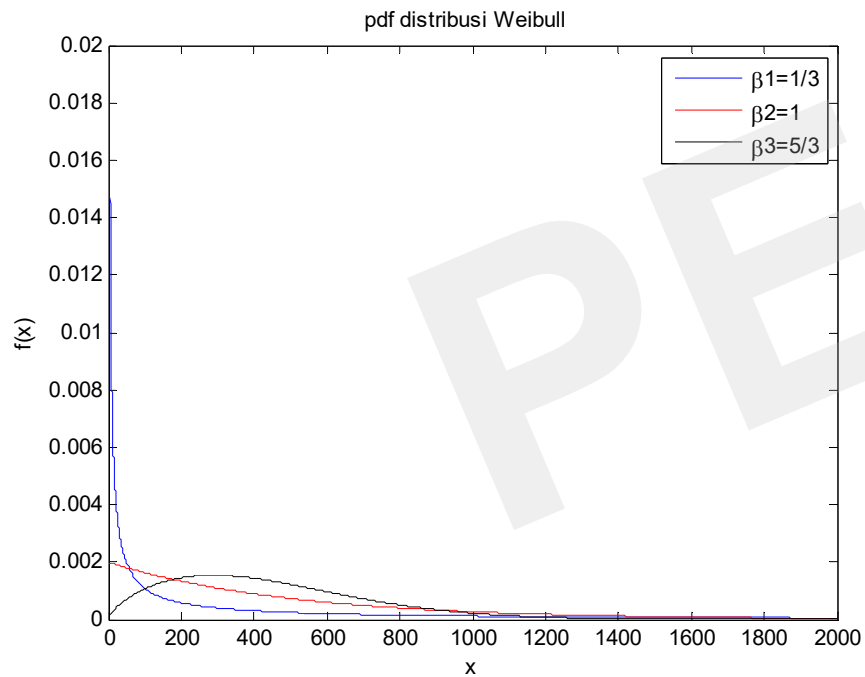
Distribusi Weibull

- Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak terdistribusi Weibull adalah:

$$F(x; \nu, \alpha, \beta) = \begin{cases} 0; & x \leq \nu \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta}; & x > \nu \end{cases}$$

- Contoh 11:

Gambarkan grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi Weibull untuk $\alpha=500$ dan $\beta=1/3, 1$ dan $5/3$.



Distribusi Normal

1. Sekumpulan nilai data kontinyu akan terdistribusi secara normal (membentuk kurva simetris) apabila rata-rata nilai variabel sama dengan median, dan sama dengan modus dari nilai-nilai data tersebut.
2. Distribusi normal mempunyai bentuk kurva seperti bel (*bell shape*).
3. Distribusi normal disebut juga distribusi Gauss (*Gaussian Distribution*)
4. Pada distribusi normal, rata-rata populasi membagi luasan kurva menjadi dua sama banyak, luas daerah sebelah kiri = 0,5 dan sebelah kanan = 0,5, total luas daerah = 1.
5. Suatu distribusi dikatakan normal jika kurang lebih 68% data observasi berada di dalam satu standard deviasi, atau kurang lebih 95% data observasi berada dalam dua standard deviasi

Distribusi Normal

- Distribusi normal dengan parameter mean, μ dan varians σ^2 biasanya ditulis sebagai $N(\mu, \sigma^2)$
- Pdf dari variabel acak terdistribusi normal dinyatakan sebagai:

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ = mean populasi

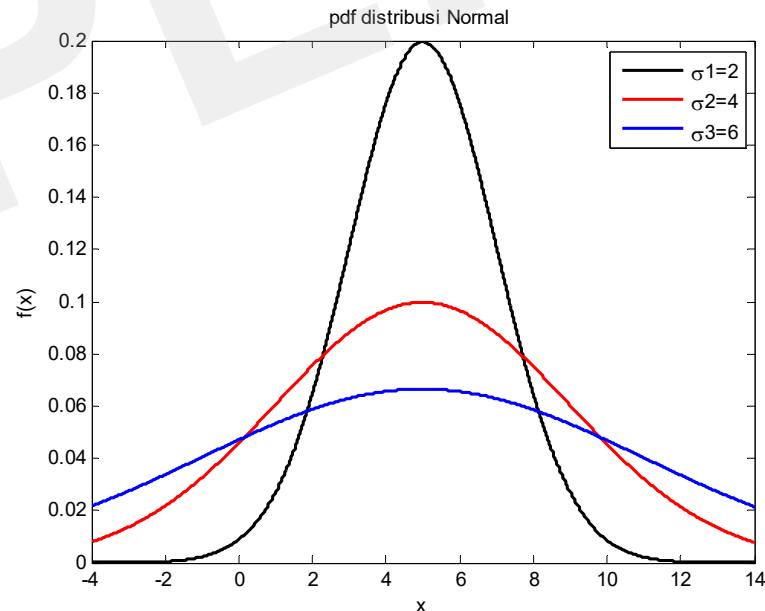
σ = standard deviasi (simpangan baku) populasi

π = konstanta 3,14159

e = konstanta 2,7182

Distribusi Normal

- Nilai σ pada distribusi normal menyatakan besarnya sebaran dari populasinya, semakin besar simpangan baku, σ sebaran data semakin menjauhi rata-rata μ nya, sebaliknya jika σ kecil maka sebaran data mendekati rata-ratanya.



Distribusi Normal

- Sifat-sifat Distribusi Normal
 1. Grafik simetris terhadap garis tegak $x = \mu$
 2. Grafik selalu berada di atas sumbu x, $f(x) > 0$
 3. Mempunyai satu nilai modus
 4. Luas daerah di bawah kurva $f(x)$ dan di atas sumbu x memiliki nilai: $P(-\infty < x < +\infty) = 1$

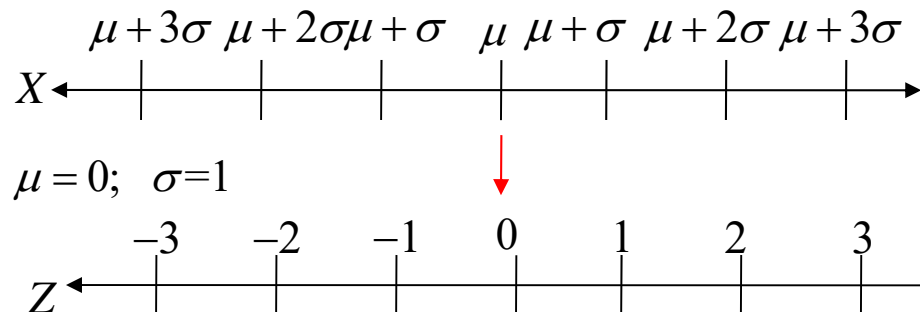
Distribusi Normal

- Probabilitas $P(a < x < b)$

- Probabilitas ini dapat ditentukan di bawah *kurva $f(x)$* dengan penyelesaian integral $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$
- Namun penyelesaian dengan integral membutuhkan proses yang rumit.
- Untuk itu diselesaikan dengan mentransformasikan nilai-nilai x menjadi nilai-nilai baku Z , dengan

persamaan:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



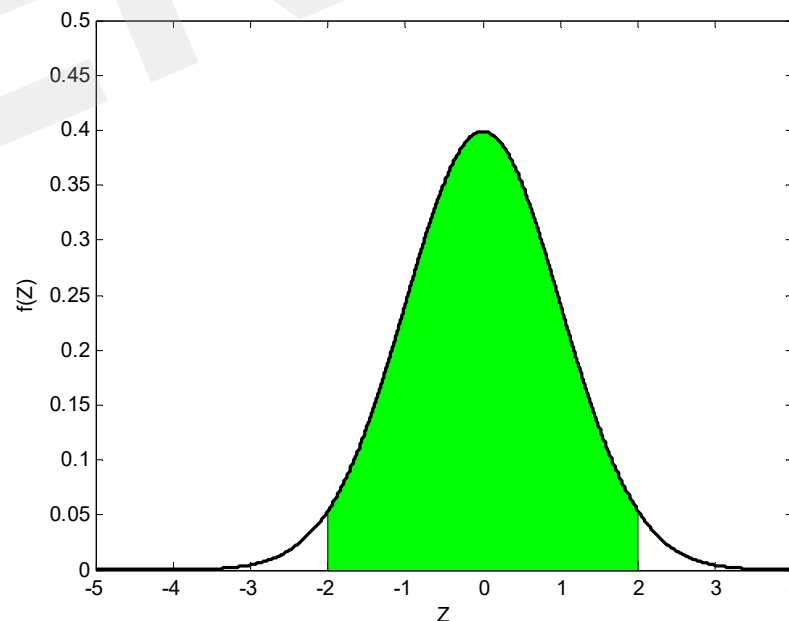
Distribusi Normal

- Setelah itu gunakan Tabel Distribusi Normal Standard (terlampir) untuk mendapatkan probabilitas dari nilai Z .

- Contoh:

Luasan berwarna hijau adalah pdf dari

$$P(-2 < Z < 2)$$



Distribusi Normal

- Fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari distribusi normal:

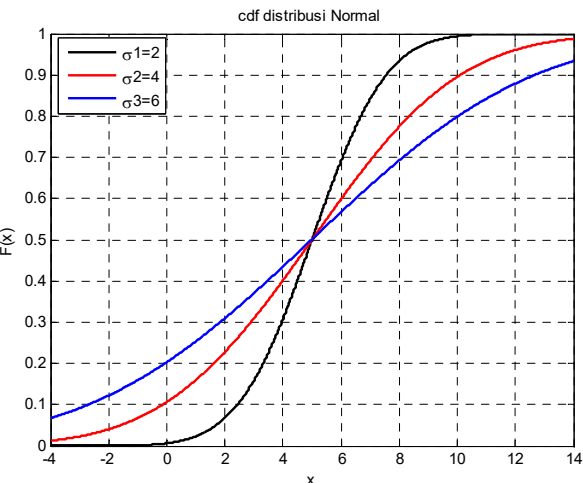
$$F(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- Sifat-sifat *cdf* dari distribusi normal:

1. $F(x)$ monoton naik

2. $0 \leq F(x) \leq 1$

3. $F(-\infty) = \lim_{X \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ dan $F(+\infty) = \lim_{X \rightarrow \infty} F(x) = 1$



- Contoh 12:

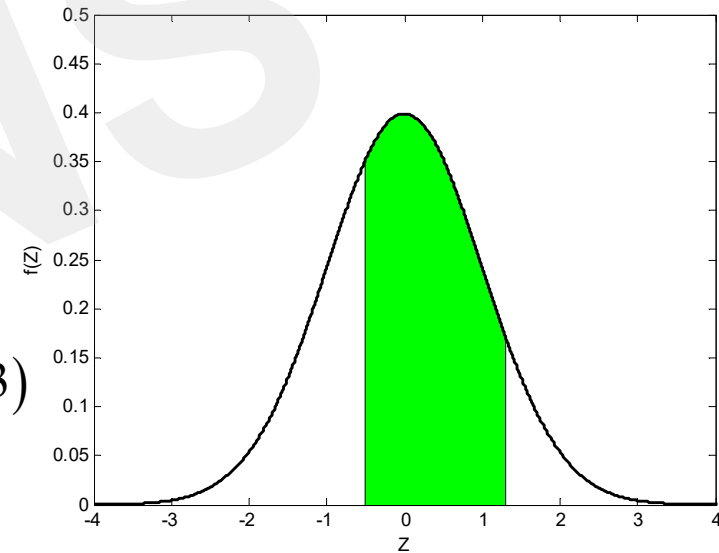
Bila X adalah variabel acak berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu = 25$ dan simpangan baku $\sigma = 10$, tentukan probabilitas $P(20 < X < 38)$
Gambarkan kurva pdf nya.

Jawab:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{20 - 25}{10} = -0,5$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{38 - 25}{10} = 1,3 \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} P(-0,5 < Z < 1,3) &= P(-0,5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1,3) \\ &= P(0 < Z < 0,5) + P(0 < Z < 1,3) \\ &= 0,1915 + 0,4032 \\ &= 0,5947 \end{aligned}$$



• Contoh 13:

Sebuah perusahaan memproduksi panci presto yang memiliki ketahanan berdistribusi normal dengan rata-rata 825 hari dan simpangan baku 45 hari. Ditanyakan:

- a. Berapa persen panci yang memiliki ketahanan antara 800 dan 860 hari ?
- b. Berapa banyak panci yang ketahanannya lebih dari 950 hari jika diproduksi 5000 panci ?

Jawab:

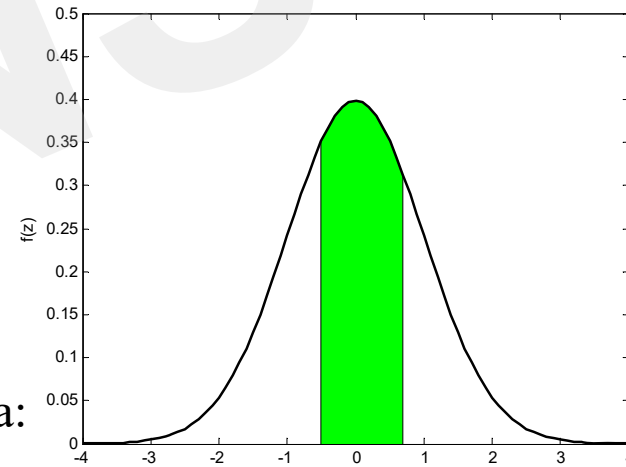
a) $\mu = 825 \quad \sigma = 45$

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{800 - 825}{45} = -0,55$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{860 - 825}{45} = 0,78 \text{ sehingga:}$$

$$\begin{aligned} P(-0,55 < Z < 0,78) &= P(-0,55 < Z < 0) + P(0 < Z < 0,78) \\ &= P(0 < Z < 0,55) + P(0 < Z < 0,78) \\ &= 0,2088 + 0,2823 \\ &= 0,4911 \end{aligned}$$

Jadi ada 49,11% panci yang punya ketahanan antara 800 dan 860 hari



b) $X_3 > 950$

$$Z_3 = \frac{X_3 - \mu}{\sigma} = \frac{950 - 825}{45} = 2,78$$

sehingga:

$$\begin{aligned} P(Z > 2,78) &= P(Z > 0) - P(0 < Z < 2,78) \\ &= 0,5 - 0,4973 \\ &= 0,0027 \end{aligned}$$

Untuk 5000 panci, terdapat $0,0027 \times 5000 = 13,5$ atau 14 panci yang punya ketahanan antara 800 dan 860 hari

