



# Probability and Random Process

Topik 4. Variabel Acak dan Distribusi  
Probabilitas

Prima Kristalina  
April 2015

# Outline

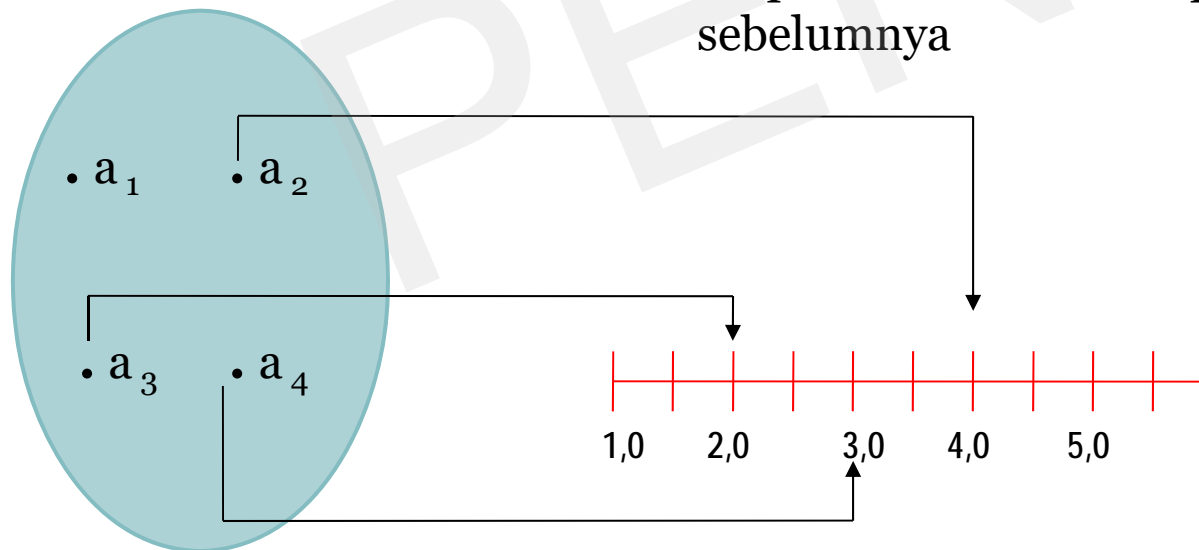
1. Definisi Variabel Acak
2. Jenis Variabel Acak: Diskrit dan Kontinyu
3. Probabilitas Distribusi Variabel Acak
4. Fungsi Densitas Probabilitas pada variabel acak: PMF dan PDF
5. Fungsi Distribusi Kumulatif (*cdf*) pada Variabel Acak

# Variabel Acak

- Suatu fungsi yang bernilai riil dari domain ruang sampel dari sebuah eksperimen acak.
- Nilainya berhubungan dengan kejadian sederhana dalam ruang sampelnya.
  - Contoh:
    - Kandungan sulfur pada 1 kuintal pupuk
    - Jarak yang ditempuh untuk 10 liter bensin
    - Jumlah hari hujan dalam setahun

# Ilustrasi

- Variabel acak dari ruang sampel yang mempunyai anggota  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  dan  $a_4$ .
- $X(a_3)$  adalah variabel acak yang menghubungkan nilai riil 2,0 ke elemen  $a_3$ . Artinya  $a_3$  bernilai 2,0.
- Istilah acak digunakan karena nilai dari eksperimen  $a$  belum dapat dipastikan sebelumnya



# Variabel Acak

- **Variabel Acak Diskrit:**
  - Variabel yang memiliki nilai pada titik tertentu.
  - Nilai dari variabel ini dapat dihitung (countable).
    - Contoh:  
Jumlah hari hujan dalam 1 tahun
- **Variabel Acak Kontinyu:**
  - Variabel yang memiliki nilai pada range tertentu.
  - Nilai dari variabel ini tak hingga banyaknya sepanjang interval tertentu
    - Contoh:  
Jumlah volume hujan dalam 1 tahun

# Variabel Acak

- Notasi:
  - $X \rightarrow$  variabel acak
  - $x \rightarrow$  nilai variabel acak
- Fungsi:
  - Suatu fungsi variabel acak adalah merupakan variabel acak juga
  - Jika  $X$  adalah variabel acak, maka  $Z = f(X)$  adalah variabel acak juga.

# Variabel Acak

- Contoh 1:

- Sebuah laundry memiliki 4 mesin cuci yang bisa disewa pelanggan. Diperkirakan mesin-mesin tersebut dapat berfungsi hingga 5 tahun ke depan. Jika  $X$  menyatakan keadaan mesin yang masih baik, tentukan ruang sampel dari variabel acak  $X$ .

- **Jawab:**

Jika B menyatakan kondisi mesin baik, dan R menyatakan mesin rusak, maka kombinasi dari kemungkinan kondisi ke-4 mesin cuci tersebut adalah: BBBB, BBBR, BBRB, BBRR, BRBB, BRBR, BRRB, BRRR, RBBB, RBBR, RBRB, RBRR, RRBB, RRBR, RRRB, RRRR

# Variabel Acak

Kondisi Mesin	Bil_Real
RRRR	0
BBBR, BBRB, BRBB, RBBB	3
BBRR, BRRB, BRBR, RBRB, RRBB, RBBR	2
BRRR, RBRR, RRBR, RRRB	1
BBBB	4

- Dari tabel dapat diketahui variabel acak  $X$  adalah:  $X=0,1,2,3,4$  dan ruang sampel  $S$  adalah:  
$$S = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$$



# Probabilitas Variabel Acak

- Peluang terjadinya / kemunculan nilai dari variabel acak  $X$ .
- Nilainya berkisar dari 0 sampai 1.
- Peluang kemunculan nilai variabel acak  $X$  pada sebuah range tertentu akan tersebar dengan model sebaran tertentu → Distribusi Probabilitas.
- Jumlahan dari seluruh fungsi distribusi probabilitas akan menuju ke nilai maksimum dari probabilitas, yaitu 1. Jumlahan ini dinamakan: *Cummulative Distribution Function* (CDF).

# Distribusi Probabilitas Variabel Acak Diskrit

- **Fungsi Massa Probabilitas** (*Probability Mass Function - pmf*):

- a. Jika pada sebuah pengamatan ditampilkan seluruh *outcome* (keluaran) yang mungkin dari variabel diskrit  $X$ , yaitu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  maka nilai-nilai probabilitas masing-masing variabel diskrit  $X$  dinyatakan sebagai:

$$P(X = x_1), P(X = x_2), P(X = x_3), \dots, P(X = x_n) \text{ atau} \\ p(x_1), p(x_2), p(x_3), \dots, p(x_n)$$

- b. Nilai-nilai dari fungsi probabilitas berada dalam interval 0 sampai 1, sehingga  $0 \leq p(x) \leq 1$
- c. Jumlah seluruh nilai fungsi probabilitas adalah 1, sehingga:  $\sum p(x) = 1$

## Distribusi Probabilitas Variabel Acak Diskrit

- **Fungsi Distributif Kumulatif** (*Cummulative Distribution Function* – cdf):

- Menyatakan jumlah dari seluruh nilai fungsi probabilitas yang lebih kecil atau sama dengan suatu nilai yang ditetapkan.
- dinyatakan sebagai:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\psi \leq x} p(\psi)$$

dan

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) \end{aligned}$$

## Distribusi Probabilitas Variabel Acak Diskrit

- Mean dari distribusi probabilitas diskrit

$$\mu_x = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

- Varians dari distribusi probabilitas diskrit

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 p(x_i)$$

# Distribusi Probabilitas Variabel Acak Diskrit

## ▫ Contoh 2:

Dari pelemparan dua dadu, dapatkan probabilitas jumlahan yang mungkin dari kedua dadu tersebut

Jawab:

Ruang sampel :

$$S = \{X \mid X \geq 2 \text{ dan } X \leq 12\}$$

Probabilitas ruang sampel:

$$\begin{aligned} P(S) &= P\left(\bigcup_{i=2}^{12} \{X = i\}\right) \\ &= \sum_{i=2}^{12} P\{X = i\} \end{aligned}$$

$$P\{X = 2\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{X = 3\} = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X = 4\} = P\{(1,3), (2,2), (3,1)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 5\} = P\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X = 6\} = P\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X = 7\} = P\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} = \frac{6}{36}$$

$$P\{X = 8\} = P\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} = \frac{5}{36}$$

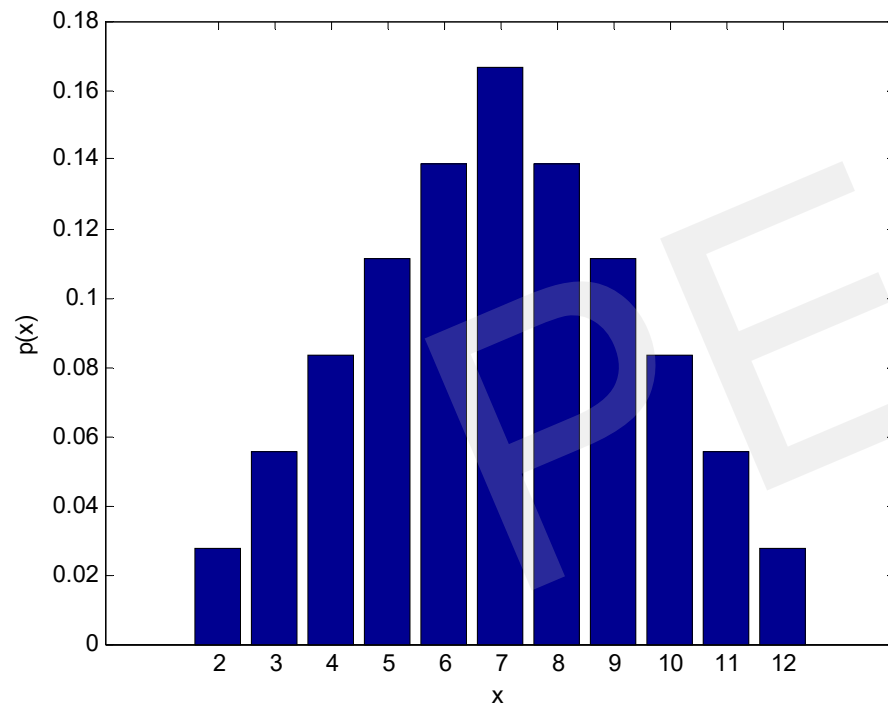
$$P\{X = 9\} = P\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X = 10\} = P\{(4,6), (5,5), (6,4)\} = \frac{3}{36}$$

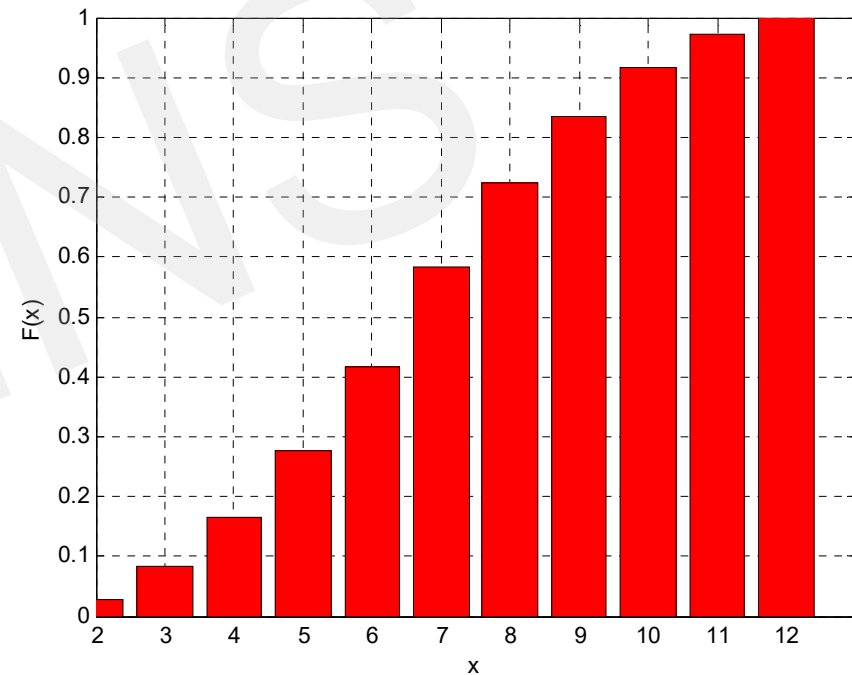
$$P\{X = 11\} = P\{(5,6), (6,5)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X = 12\} = P\{(6,6)\} = \frac{1}{36}$$

# Distribusi Probabilitas Variabel Acak Diskrit



Grafik distribusi probabilitas contoh 2



Grafik *cdf* contoh 2

# Distribusi Probabilitas Variabel Acak Diskrit

- Contoh 3:

Sebuah dealer motor mempunyai rincian jumlah motor terjual perhari selama 200 hari seperti berikut:

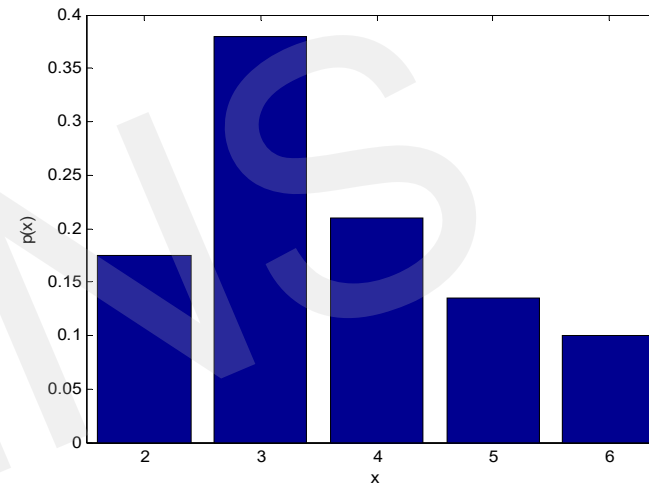
Jumlah motor terjual dalam sehari	Jumlah hari
2	35
3	76
4	42
5	27
6	20
TOTAL	200

- a. Buatlah distribusi probabilitas penjualan motor selama 200 hari tersebut dan sajikan dalam bentuk grafik.
- b. Cari fungsi distribusi kumulatif dan sajikan dalam bentuk grafik

Jawab:

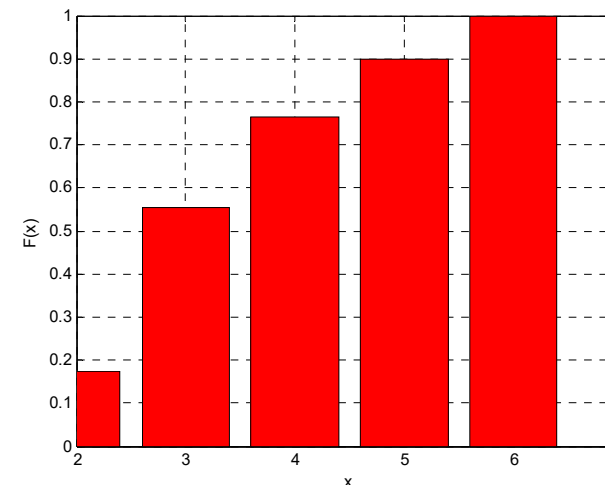
a. Distribusi frekuensi dan grafik distribusi frekuensi dari contoh 3

<b>x</b>	<b>p(x)</b>
2	0,175
3	0,38
4	0,21
5	0,135
6	0,1
TOTAL	1



b. Fungsi distribusi kumulatif dan grafik cdf dari contoh 3

<b>x</b>	<b>p(x)</b>
2	0,175
3	0,555 = 0,175 + 0,38
4	0,765 = 0,175 + 0,38 + 0,21
5	0,90 = 0,175 + 0,38 + 0,21 + 0,135
6	1,00 = 0,175 + 0,38 + 0,21 + 0,135 + 0,1





# Distribusi Variabel Acak Kontinyu

- Distribusi variabel acak kontinyu sering disebut sebagai fungsi kepadatan atau **Fungsi Kepadatan Probabilitas** (*probability density function – pdf*).
- Fungsi ini bukan fungsi probabilitas
- Pdf dinyatakan sebagai **f(x)**, dan nilainya bisa lebih besar dari 1.
- Pdf harus memenuhi syarat sbb:

a. fungsi kepadatan probabilitas  $f(x) \geq 0$

b. integral seluruh pdf  $\int f(x)dx = 1$

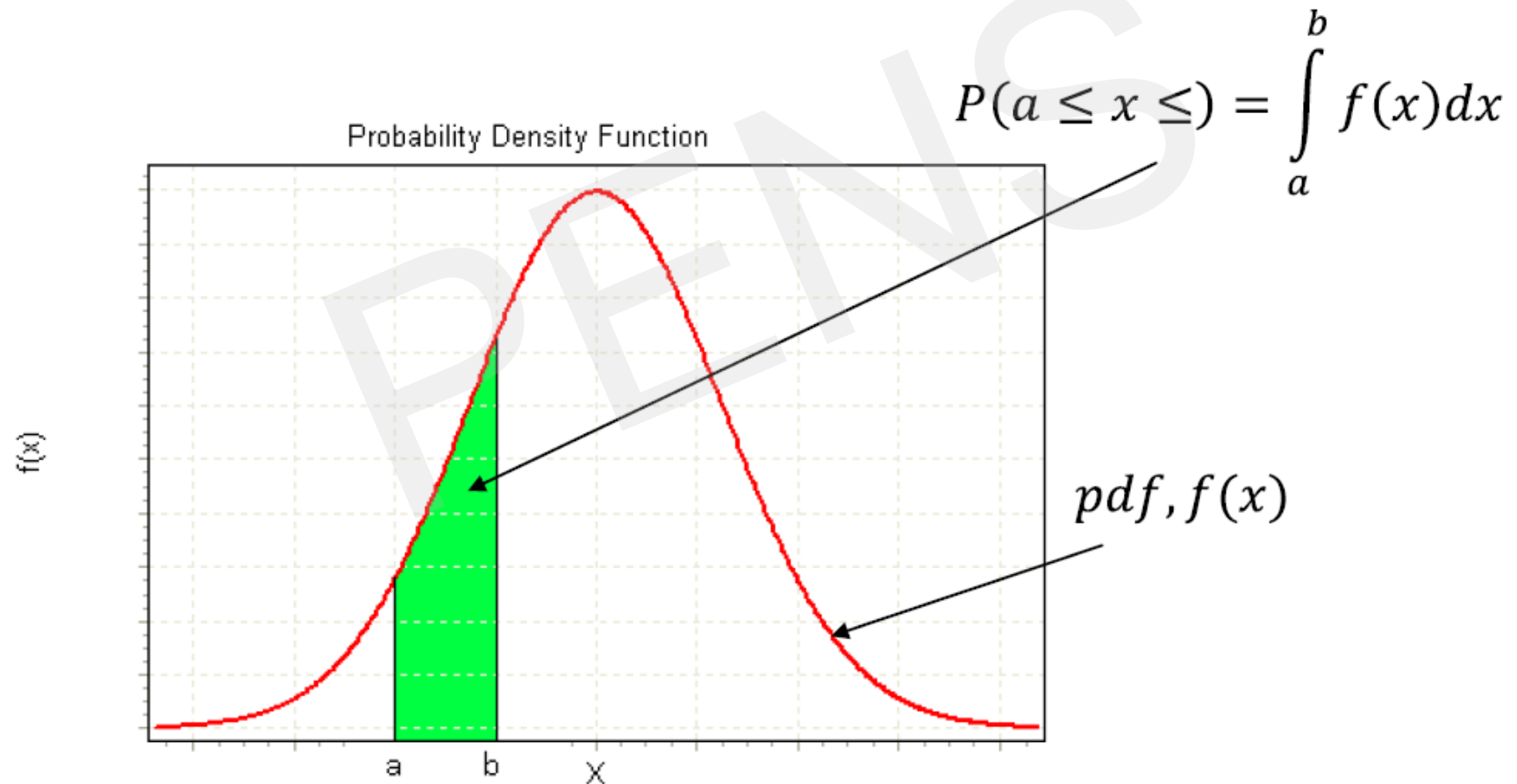
c. Probabilitas variabel acak x yang terletak antara a dan b memenuhi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

## Fungsi Kepadatan Probabilitas Variabel Acak Kontinyu

- Secara teoritis kurva probabilitas populasi diwakili oleh poligon frekuensi relatif yang dimuluskan (variabel acak kontinyu diperlakukan seperti variabel acak diskrit yang rapat).
- Karena itu fungsi  $f(x)$  dari variabel acak kontinyu merupakan fungsi kepadatan probabilitas (probability density function - pdf).
- *Pdf* menggambarkan besarnya propabilitas per unit interval nilai variabel acaknya.

# Fungsi Kepadatan Probabilitas Variabel Acak Kontinyu



Mukhtasor, JTK-FTK,ITS, Bab 4: Distribusi Probabilitas

## Fungsi Kepadatan Probabilitas Variabel Acak Kontinyu

- Mean dari distribusi probabilitas kontinyu:

$$\mu_x = \int x \cdot f(x) dx$$

- Varians dari distribusi probabilitas kontinyu:

$$\sigma_x^2 = \int \sum_{i=1}^n (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

## Fungsi Kepadatan Probabilitas Variabel Acak Kontinyu

- Contoh 4:

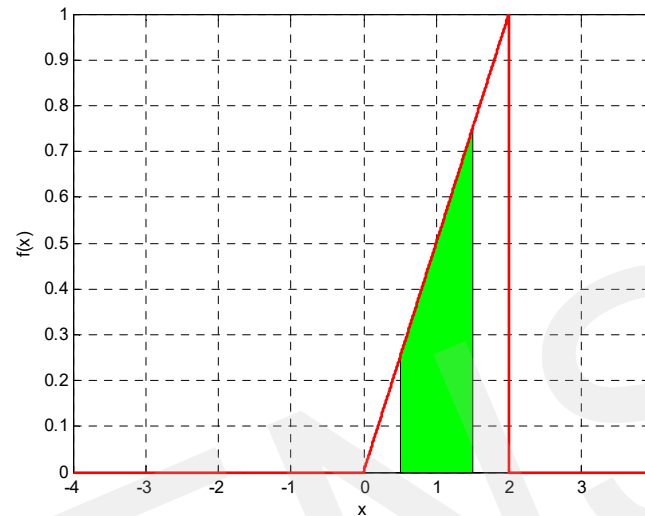
Diketahui suatu variabel acak  $X$  memiliki fungsi kerapatan probabilitas (pdf) sbb:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{untuk } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{untuk nilai } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- a. Gambarkan grafik pdf nya
- b. Tunjukkan bahwa  $P(0 < X < 2) = 1$
- c. Hitung  $P(0,5 < X < 1,5)$

• Jawab:

a. Grafik pdf:



b. Bukti  $P(0 < X < 2) = 1$

$$\begin{aligned} P(0 < X < 2) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2.2} x^2 \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{4} (2)^2 - \frac{1}{4} (0)^2 = 1 \end{aligned}$$

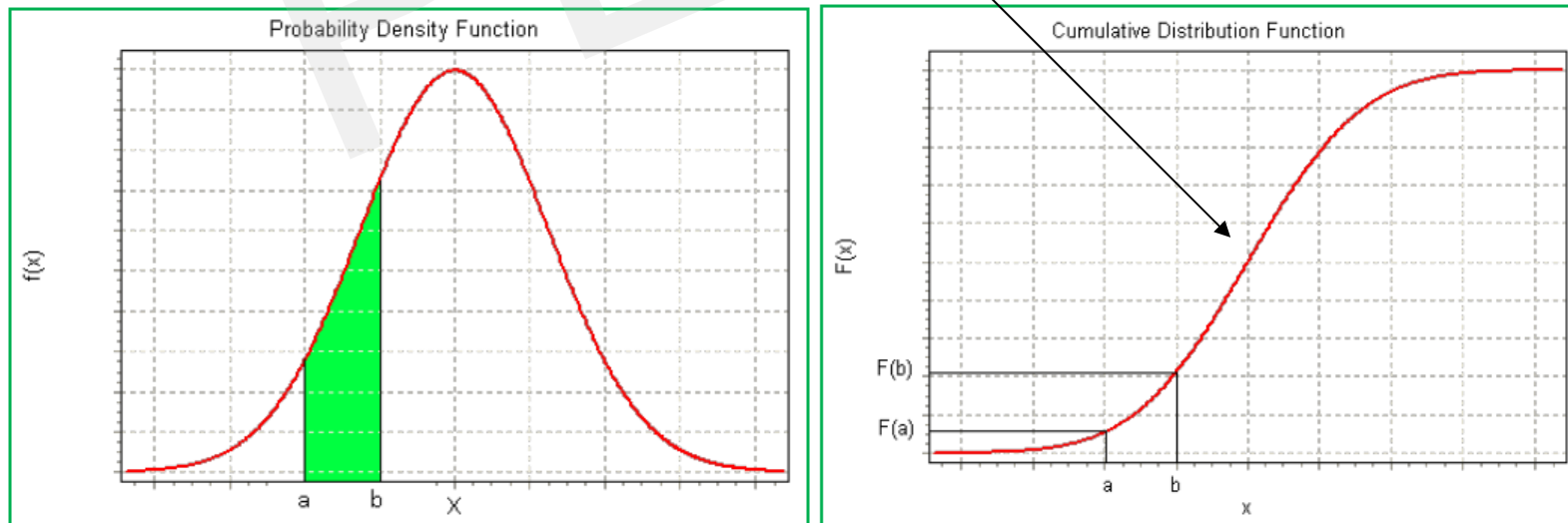
c. Untuk  $P(0,5 < X < 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{x}{2}$

$$= \frac{1}{4} (1,5)^2 - \frac{1}{4} (0,5)^2 = \frac{2,25 - 0,25}{4} = \frac{1}{2}$$

## Fungsi Distribusi Probabilitas Variabel Acak Kontinyu

Pada variabel diskrit, *cdf* dinyatakan sebagai jumlahan dari fungsi probabilitas masing-masing variabelnya, sedangkan pada variabel kontinyu *cdf* dinyatakan sebagai integral dari fungsi kepadatan variabelnya, dan nilainya kontinyu dalam interval tertentu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$



## Beberapa sifat Probabilitas Variabel Acak Kontinyu

$$1) f(x) \geq 0, \forall x$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$3) F(-\infty) = 0$$

$$4) F(+\infty) = 1$$

$$5) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$$6) P(X = c) = \int_c^c f(t) dt = F(c) - F(c) = 0$$

$$7) P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$