Program Pasca Sarjana Terapan
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Probability and Random Process

Topik 3. Dasar Probabilitas

Prima Kristalina
Maret 2015

Outline

1. Review Statistika Inferensial
2. Konsep Probabilitas
3. Ruang sampel dan Kejadian
4. Review teori Himpunan
5. Probabilitas Kejadian Majemuk
6. Ruang sampel dengan outcome yang sama
7. Kombinatorik
8. Conditional Probability dan Joint Event
9. Kejadian saling lepas dan saling bebas
10. Probabilitas Marginal dan Teorema Bayes

Statistika Inferensial (1/2)

- Bagian dari ilmu statistic yang mempelajari tata cara penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan populasi berdasarkan data hasil penelitian dari sampel.
- Beberapa tata cara tersebut meliputi:
  - Membuat estimasi harga parameter populasi
  - Menguji hipotesis harga parameter populasi
  - Membuat prediksi tentang hubungan antar variabel
  - Menghitung derajat pertautan (korelasi) antar variabel

Statistika Inferensial (2/2)

- Untuk melakukan estimasi harga parameter, pengujian hipotesis, prediksi tentang hubungan dua variable atau lebih serta pertautan antar variable dibutuhkan pemahaman tentang teori probabilitas
- Teori probabilitas diperlukan untuk mendapatkan kemungkinan dari beberapa sampel yang diambil dalam sebuah kejadian/observasi pada sekelompk populasi

Pemahaman Konsep Probabilitas

- Dalam kehidupan sehari-hari banyak kejadian *(event)* yang sulit diketahui dengan pasti, apalagi untuk kejadian yang akan datang.
- Pada prinsipnya, meskipun sulit diketahui, namun fakta-fakta yang ada bisa menuju derajat kepastian / derajat keyakinan *(degree of belief)* bahwa sesuatu akan terjadi.
- Probabilitas : besarnya kesempatan (kemungkinan) suatu peristiwa akan terjadi.
- Range berkisar antara 0 - 1, di mana "0" menyatakan bahwa peristiwa pasti tidak akan terjadi, dan "1" menyatakan bahwa peristiwa pasti terjadi.

Perumusan Probabilitas (1/3)

1. <u>Perumusan Klasik (Probabilitas Apriori)</u>
   - Probabilitas yang telah ditentukan lebih dulu
   - Bila kejadian **E** terjadi dalam **m** cara dari seluruh **n** cara yang mungkin, dan masing-masing **n** cara tersebut memiliki kesempatan yang sama untuk muncul, maka probabilitas kejadian **E**, ditulis sebagai **P(E)** dirumuskan sebagai:

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{m}{n}}$$

   - Contoh: probabilitas keluarnya nilai 3 pada dadu 6 muka adalah: $P(E) = P(3) = P(1) = P(2) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

Perumusan Probabilitas (2/3)

2. <u>Perumusan dengan Frekuensi Relatif (empirik)</u>
   - Konsep perumusan ini menggunakan data statistik, dengan pendekatan empiris yang memakai frekuensi relatif dari terjadinya suatu kejadian dengan syarat banyaknya pengamatan atau sampel *n* sangat besar.
   - Probabilitas berdasarkan fakta setelah kejadian

$$\boxed{P(A) = \frac{f}{n}}$$

f =frekuensi kemunculan kejadian A, n=jumlah sampel

   - Dengan perumusan frekuensi relatif ini, sebuah kejadian ada kemungkinan tidak muncul dalam pengamatan

Perumusan Probabilitas (3/3)

- Distribusi nilai 100 mahasiswa yang mengikuti ujian statistika diberikan sbb:

Nilai X	45	55	65	75	85	95
Frekuensi f	10	15	30	25	15	5

- Probabilitas kejadian E mahasiswa yang mendapat nilai 55 adalah:

$$P(E) = P(X = 55) = \frac{15}{100} = 0,15$$

- Probabilitas kejadian E mahaiswa yang nilainya di bawah 65 adalah:

$$P(E) = P(X < 65) = P(X = 45) + P(X = 55) = \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0,25$$

Peranan Probabilitas

- Kuantifikasi ketidakpastian dan penilaian pengaruhnya pada perilaku dan perancangan suatu sistem. Diselesaikan dengan melibatkan konsep atau metode probabilitas
- Variabel acak, yaitu variabel yang tidak dapat diramalkan dengan pasti. Kepastian nilai variabel ini hanya dapat diramalkan dengan probabilitas.
- Pemodelan atau penaksiran tidak sempurna karena data yang dimiliki terbatas.

Review Teori Himpunan (1/6)

- Himpunan dapat didefinisikan dalam 2 cara:
  - Dengan metode enumerasi
    - Contoh: daftar nama mahasiswa $A = \{\text{Novi,Alfan,Gaguk}\}$
  - Dengan metode deskripsi
    - Contoh: $A = \{\text{Mahasiswa: setiap mahasiswa terdaftar di kelas probabilitas}\}$
    - Tanda ":" menyatakan "*such that*"
    - Contoh: $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (enumerasi)
      $B = \{I : I \text{ adalah integer dan } I \geq 1\}$ (deskripsi)
  - Sifat ekivalen: $C_1 = \{\text{Andi,Budi,Norman}\}$, $C_2 = \{\text{murid laki-laki di kelas}\}$, maka $C_1 = C_2$
    $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{2,3,1\}$, maka $A_1 = A_2$

Review Teori Himpunan (2/6)

- Himpunan elemen *A* adalah himpunan bagian dari ruang semesta *S*, dinyatakan sebagai : $A \subset S$

  Contoh:

  $S = \{I : I = \text{integer } \leq 10\}$

  $A = \{1, 2, 3, 4\},$

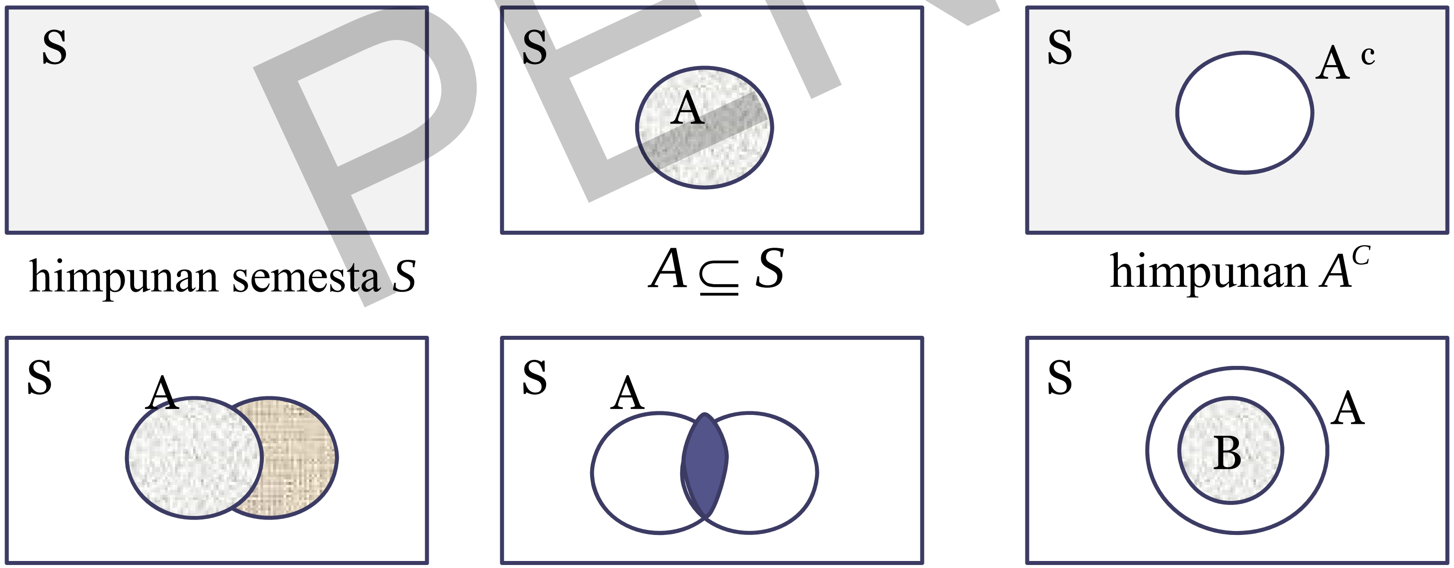
  maka $A \subset S = \{1, 2, 3, 4\}$
- Jika $A \subset B$ dan $B \subset A$ maka A=B
- Semua elemen di dalam ruang semesta *S* yg bukan anggota himpunan *A* dikatakan sebagai komplemen dari *A*, dinyatakan sebagai A^C
- Komplemen dari ruang semesta *S* adalah himpunan kosong, $S^C = \varnothing,\ \varnothing^C = S,\ \left(A^C\right)^C = A$

Review Teori Himpunan (3/6)

- **Operasi Himpunan:**
  - <u>Union (penjumlahan)</u>
    - Jika A dan B adalah himpunan bagian dari semesta S, maka $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen yang menjadi bagian dari A atau B atau keduanya
    - Secara umum: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$
  - <u>Interseksi (product)</u>
    - Jika A dan B adalah himpunan bagian dari semesta S, maka $A \cap B$ adalah himpunan semua elemen yang menjadi bagian dari A dan B
    - Secara umum: $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$
  - Jika $A \cap B$ atau $AB = \varnothing$, maka himpunan elemen dari A dan B adalah himpunan kosong, dikatakan sebagai *disjoint*.

Review Teori Himpunan (4/6)

- Diagram Venn untuk berbagai kejadian dalam himpunan semesta S



himpunan semesta S | $A \subseteq S$ | himpunan A^C

$A \cup B$ | $A \cap S$ | $B \subset A$

Review Teori Himpunan (5/6)

- **Sifat-sifat Himpunan**
  - Komutatif: $A \cup B = B \cup A, \;\; A \cap B = B \cap A$
  - Asosiatif: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \;\; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - Distributif:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Hukum De Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Review Teori Himpunan (6/6)

- Aljabar Boolean

$$A \cup A = A \cap A = A$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup S = S$$
$$A \cap S = A$$
$$A \cup A^C = S$$
$$A \cap A^C = \varnothing$$

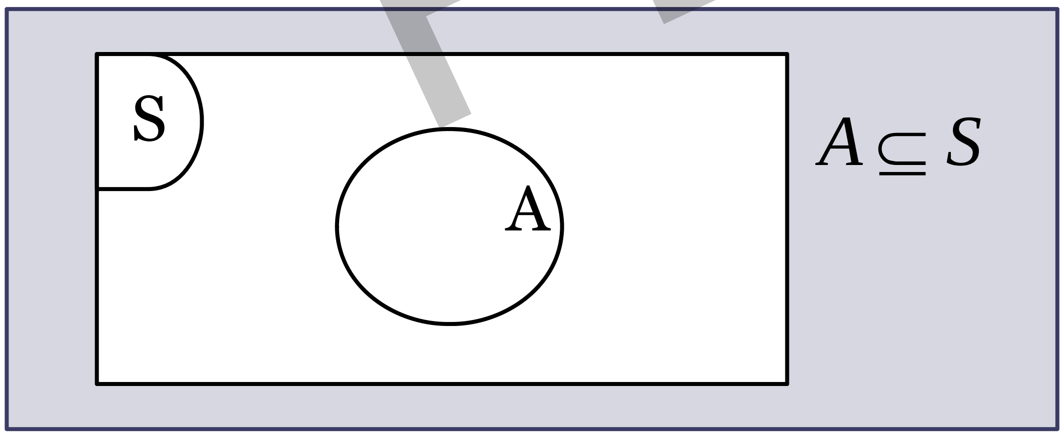
- Aturan-aturan lain: $$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup \left(A^C \cap B \right) \\ &= A + \left(A^C . B \right) \end{aligned}$$

Ruang Sampel dan Kejadian

- Dalam teori probabilitas, outcome dari sebuah observasi bergantung kepada kesempatan, yang dinamakan sebagai eksperimen acak .
- *Ruang sampel* (S): himpunan semua hasil yang mungkin muncul / terjadi dari sebuah observasi
  - Anggota dari ruang sampel disebut titik sampel atau sampel saja.
- *Kejadian* (E): sebuah hasil yang muncul dari sebuah observasi
  - Contoh: Pada pelemparan sebuah koin, kejadian munculnya salah satu dari 2 sisi dinyatakan sebagai sebagai $S=\{m,b\}$ dengan $A=\{m\}$ atau $A=\{b\}$ sehingga $A\subseteq S$

Keterkaitan Konsep Probabilitas dan Teori Himpunan

Teori Himpunan	Konsep Probabilitas
• Himpunan Semesta S	• Ruang Sampel S
• Himpunan Bagian A	• Kejadian A
• Anggota Himpunan	• Titik Sampel



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

Teori Himpunan	Konsep Probabilitas
Himpunan Kosong, $\varnothing$	Kejadian tidak muncul
Elemen *a*, *b*,...	Titik sampel *a*, *b*,...
Himpunan A, B,...	Peristiwa terjadi A, B, ...
Himpunan A^C	Kejadian A tidak muncul
Himpunan $A \cup B$	Salah satu dari kejadian A atau B muncul
Himpunan $A \cap B$	Kejadian A dan B keduanya muncul
Himpunan $A \subset B$	A adalah sub kejadian dari B (dimana munculnya kejadian A berimplikasi pada kemunculan B)
Himpunan $A.B = \varnothing$	A dan B adalah *mutually exclusive* (tidak muncul dalam waktu bersamaan)

Aksioma Probabilitas

- Aksioma 1: $0 \le P(A) \le 1$
- Aksioma 2: $P(S) = 1$ (normed)
- Aksioma 3:
  - Untuk dua atau lebih kejadian <u>Saling Lepas</u> /*Mutually Exclusive*, yaitu dua kejadian tersebut yang saling tidak berhubungan dan tidak mungkin terjadi secara bersamaan berlaku:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = P\left(\sum_j A_j\right) = \sum_j P(A_j)$$

  - Jika A dan B saling *disjoint*, maka:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Probabilitas Kejadian Majemuk

- Jika ada dua kejadian, A dan B pada himpunan semesta S, maka:
  - Banyaknya anggota himpunan $A \cup B$ adalah:
    $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
  - Probabilitas dari $A \cup B$ adalah:
    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
  - Probabilitas dari $A \cup B \cup C$ adalah:
    $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
    $$P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
  - Pada ***n*** kejadian:
    $$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=3}^{n} P(A_i A_j A_k)$$

Statistika Independen

- Dua Kejadian Saling Bebas /*Statistical Independent*
  - Jika terjadinya suatu peristiwa tidak mempengaruhi terjadinya peristiwa yang lain

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N) = P(A_1).P(A_2)\ldots.P(A_N)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i)$$

- Contoh 1:
  - Dari pelemparan 2 buah dadu, apakah kejadian munculnya dua muka dadu dengan jumlah 7 atau 11 saling lepas ?

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$B=\{(6,5),(5,6)\}$$

$$(A\cap B)=\{\ \}$$

$$(A\cup B)=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),(6,5),(5,6)\}$$

diperoleh:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},\ P(A\cap B)=\varnothing, P(A\cup B)=\frac{8}{36}$$

$$P(A)+P(B)=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{8}{36}$$

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)$$

Saling lepas

- Contoh 2:
  - Pada pengamatan 3 ibu-ibu yang sedang mencuci dengan sabun (s) dan detergen (d) tunjukkan bahwa ketiganya mencuci menggunakan detergen adalah saling bebas

$$S = \{(s,s,s),(s,s,d),(s,d,s),(s,d,d),$$
$$(d,s,s),(d,s,d),(d,d,s),(d,d,d)\}$$

$A = \{(d,s,s),(d,s,d),(d,d,s),(d,d,d)\}$ Ibu I pakai detergen

$B = \{(s,d,s),(s,d,d),(d,d,s),(d,d,d)\}$ Ibu II pakai detergen

$C = \{(s,s,d),(s,d,d),(d,s,d),(d,d,d)\}$ Ibu III pakai detergen

$$(A \cap B \cap C) = \{(d,d,d)\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8},$$

$$P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(A).P(B).P(C) = P(A \cap B \cap C)$$

Saling bebas

Ruang Sampel Dengan Hasil-hasil Yang Memiliki Kemungkinan Sama (1/2)

- Disebut sebagai Ruang sampel yang memiliki *Equally Likely Outcome*
- Beberapa kejadian dalam sebuah ruang sampel ada kesempatan untuk memiliki kemungkinan hasil yang sama, terutama dalam pengamatan dengan frekuensi yang tinggi.
- Kemungkinan kejadian tersebut tidak dapat diselesaikan dengan persamaan probabilitas biasa, namun dengan pendekatan metode *Counting* / pencacahan atau kombinatorik.

Ruang Sampel Dengan Hasil-hasil Yang Memiliki Kemungkinan Sama (2/2)

- Kaidah Prinsip Dasar Pencacahan (*Counting*) sbb:
  - Jika ada n_1 cara untuk mengerjakan suatu hal dan ada n_2 cara untuk mengerjakan hal lain, maka akan menghasilkan n_1 **x** n_2 cara untuk mengerjakan kedua hal tersebut bersama-sama. Ini berlaku pula untuk lebih dari 2 cara.
- Pendekatan Counting: Bilangan Faktorial
- Pendekatan Kombinatorik : Permutasi dan Kombinasi

- Contoh:
  - Seorang karyawan memiliki 5 baju (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) dan 4 celana (B_1, B_2, B_3, B_4). Berapa banyak kombinasi pasangan yang bisa digunakan ke kantor ?

$$\{(A_1,B_1),(A_2,B_1),(A_3,B_1),(A_4,B_1),(A_5,B_1),$$
$$(A_1,B_2),(A_2,B_2),(A_3,B_2),(A_4,B_2),(A_5,B_2),$$
$$(A_1,B_3),(A_2,B_3),(A_3,B_3),(A_4,B_3),(A_5,B_3),$$
$$(A_1,B_4),(A_2,B_4),(A_3,B_4),(A_4,B_4),(A_5,B_4)\}$$

jika n_1 adalah jumlah baju =5, n_2 adalah jumlah celana=4,

maka kombinasi cara pemakaian baju dan celana secara bersama-sama

$C = n_1.n_2 = 5x4 = 20$ cara

Bilangan faktorial

- Jika n adalah bilangan bulat, maka faktorial dari n dituliskan sebagai :

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

  - Contoh:
    - Seorang pustakawan memiliki 10 buku, terdiri dari 4 buku matematika, 3 buku kimia, 2 buku sejarah dan 1 buku bahasa. Pustakawan tersebut ingin menyusun ke-10 buku tsb di rak dimana buku-buku yang se-topik berada di rak yang sama. Berapa macam penyusunan buku yang bisa dilakukan ?

$$4!4!3!2!1! = 4..3.2.1.4.3.2.1.3.2.1.2.1.1 = 6912 \text{ cara}$$

Permutasi

- Susunan yang dibentuk dari anggota-anggota suatu himpunan dengan mengambil sebagian atau seluruh anggota himpunan dan memberi arti pada urutan masing-masing anggota tersebut.
- Jika dalam sebuah himpunan ada *n* anggota, dan terpilih sebanyak *r* anggota, dimana $\boldsymbol{r \le n}$ maka permutasi dari *r* terhadap *n* anggota tsb dinyatakan sebagai:

$$ {}_nP_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

- Contoh:
  - Berapa banyaknya cara untuk menerima 2 pasien rawat inap dari 4 orang pasien yang datang ?

$$n = 4, \quad r = 2$$

$$S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} = 4$$

$$R = \{(P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_1, P_4), (P_2, P_1), (P_2, P_3), (P_2, P_4),$$
$$(P_3, P_1), (P_3, P_2), (P_3, P_4), (P_4, P_1), (P_4, P_2), (P_4, P_3)\} = 12$$

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

Kombinasi

- Susunan yang dibentuk dari anggota-anggota suatu himpunan dengan mengambil sebagian atau seluruh anggota himpunan <u>tanpa memberi arti pada urutan masing-masing</u> anggota tersebut.
- Jika dalam sebuah himpunan ada *n* anggota, dan terpilih sebanyak *r* anggota, dimana $\boldsymbol{r \le n}$ maka kombinasi dari *r* terhadap *n* anggota tsb dinyatakan sebagai:

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

- Contoh:
  - Dalam sebuah kelompok terdapat 4 kimiawan dan 3 fisikawan. Buatlah susunan 3 orang sebagai panitia terdiri dari 2 kimiawan dan 1 fisikawan

$$n_1 = 4, \quad r_1 = 2 \qquad S_K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$$

$$n_2 = 3, \quad r_2 = 1 \qquad S_F = \{F_1, F_2, F_3\}$$

$${}_4C_2 = \{(K_1, K_2), (K_1, K_3), (K_1, K_4), (K_2, K_3), (K_2, K_4), (K_3, K_4)\} = 6$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6$$

$${}_3C_1 = \{F_1, F_2, F_3\} = 3$$

Banyaknya panitia terbentuk =6x3=18 cara

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3.2.1}{1.2.1} = 3$$

Latihan Soal:

1. Pengembang real estate menawarkan kepada konsumen 3 tipe rumah, 2 tipe garasi dan 3 tipe sistim pemanasan. Berapa macam disain rumah yang tersedia bagi konsumen ?

2. Kantor wilayah DepKes akan menempatkan 4 dokter baru dari 10 dokter baru yang menunggu penempatan. Tentukan:
   a) Berapa kombinasi dokter yang dapat dibentuk ?
   b) Berapa kombinasi jika pengiriman dokter tidak lebih dari 4 orang ?

Kejadian yang Saling Mempengaruhi

- Berdasarkan pengaruh dari satu kejadian terhadap kejadian yang lain, pembahasan probabilitas dibedakan menjadi:
  1. <u>Probabilitas Bersyarat</u> (*Conditional Probability*)
     - Kemunculan sebuah kejadian tergantung dari kejadian lain yang telah muncul sebelumnya
  2. <u>Probabilitas Tidak Bersyarat</u> (*Unconditional Probability)*
     - Kemunculan sebuah kejadian tidak harus tergantung kejadian lain yang muncul sebelumnya (bisa berdiri sendiri)

Probabilitas Tidak Bersyarat (Unconditional Probability)

- Sebuah kejadian bisa muncul pada ruang sampel dengan karakteristik tertentu, dimana setiap karakter memiliki kesempatan untuk dipilih

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Probabilitas ini bisa didapatkan dari probabilitas gabungan dimana kedua kejadian saling bebas (*statistical inpendent*).
- Apabila kejadian tertentu tersebut diambil dari beberapa kejadian lain yang saling lepas, maka dinamakan probabilitas marginal (*marginal probability*)

Probabilitas Bersyarat (Conditional Probability)

- Probabilitas terjadinya peristiwa A bila peristiwa B terjadi lebih dulu, dinyatakan sebagai:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

$P(B)$ = probabilitas terjadinya peristiwa B

$P(A \cap B)$ = probabilitas terjadinya peristiwa A dan B secara bersamaan

$P(A \mid B)$ = probabilitas terjadinya peristiwa A dengan syarat peristiwa B terjadi lebih dulu

- Probabilitas terjadinya peristiwa B bila peristiwa A terjadi lebih dulu, dinyatakan sebagai:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

- Contoh 1:
- Distribusi anak laki-laki dan perempuan berdasarkan usia di sebuah sekolah diberikan pada tabel berikut:

	UMUR						
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**TOTAL**
Laki-laki	400	329	521	410	430	360	2450
Perempuan	300	510	425	521	370	500	2626
TOTAL	700	839	946	931	800	860	5076

- Carilah:
  1. Probabilitas pengambilan acak seorang anak laki-laki
  2. Probabilitas pengambilan acak seorang anak laki-laki usia 5 tahun
  3. Probabilitas pengambilan acak seorang anak (baik laki-laki maupun perempuan) dengan usia paling sedikit 8 tahun

- <u>Jawab:</u>
  1. Probabilitas seorang anak laki-laki:

$$P(laki-laki) = \frac{2450}{5076} = 0,483$$

  2. Probabilitas seorang anak laki-laki usia 5 tahun

$$P(laki-laki \cap 5) = \frac{400}{5076} = 0,079$$

  3. Probabilitas seorang anak paling sedikit usia 8 tahun

$$P(U \geq 8) = P(U = 8) + P(U = 9) + P(U = 10)$$
$$= \frac{931}{5076} + \frac{800}{5076} + \frac{860}{5076} = \frac{2591}{5076} = 0,51$$

- Dari contoh 1, carilah:
  1. Probabilitas anak umur 9 tahun dari kelompok anak perempuan

     $$P\left(9 \mid perempuan\right) = \frac{370}{2626} = 0{,}14$$

     Jawaban ini berbeda dengan probabilitas anak perempuan umur 9 tahun, yaitu:

     $$P\left(perempuan \cap 9\right) = \frac{370}{5076} = 0{,}073$$

  2. Probabilitas anak berumur paling tinggi 7 tahun dari kelompok anak laki-laki

     $$P\left(U \leq 7 \mid laki-laki\right) = \frac{400}{2450} + \frac{329}{2450} + \frac{521}{2450} = \frac{1250}{2450} = 0{,}51$$

- Contoh 2:
  - Populasi sarjana di suatu kota dibagi menurut jenis kelamin dan status pekerjaan sbb:

	Bekerja	Menganggur	Jumlah
Laki-laki	300	40	340
Wanita	100	200	300
Jumlah	400	240	640

  - Misalkan diambil salah satu dari mereka untuk mempromosikan produk di kota tsb, dan orang tsb ternyata telah bekerja. Berapa probabilitasnya bahwa dia laki-laki, dan bahwa dia perempuan ?

$A = \text{kejadian terpilih sarjana bekerja, } P(A) = \frac{400}{640}$

$n(A \cap B) = \text{sarjana bekerja laki-laki=300, } P(A \cap B) = \frac{300}{640}$

$P(B \mid A) = \text{sarjana laki-laki dari kelompok bekerja}$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{300/640}{400/640} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \Rightarrow \quad \text{sarjana laki-laki bekerja}$$

$$\text{Kejadian bahwa dia wanita: } \mathrm{P}(B \mid A) = \frac{100/640}{400/640} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \text{sarjana wanita bekerja}$$

Kemunculan Dua Atau Lebih Kejadian

- Berdasarkan kebersamaan kemunculan dan pengaruhnya satu dengan yang lain, pembahasan probabilitas dibedakan menjadi 2 macam:
  1. Probabilitas Gabungan (Joint Probability)
     - Probabilitas dua atau lebih kejadian muncul dalam waktu bersamaan (secara bersama-sama)
  2. Probabilitas Marginal (Disjoint Probability)
     - Probabilitas kemunculan sebuah kejadian

Joint Probability
dari A2 dan B1

	A_1	A_2	TOTAL
B_1	a/N	b/N	(a+b)/N
B_2	c/N	d/N	(ac+d)/N
TOTAL	(a+c)/N	(b+d)/N	

Marginal Probability
dari A1

Probabilitas Gabungan (Joint Probability) (1/3)

- Probabilitas Gabungan adalah probabilitas dimana dua kejadian muncul dalam waktu bersamaan (secara bersama-sama)
- Probabilitas ini juga bisa didapatkan dengan mengalikan probabilitas bersyarat dengan probabilitas sebuah peristiwa yang terlibat dalam persyaratan tersebut.

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$
$$= P(B|A).P(A), \text{ dimana } P(A), P(B) > 0$$

Probabilitas Gabungan (Joint Probability) (2/3)

- Probabilitas Gabungan juga dinamakan probabilitas interseksi karena merupakan irisan dari probabilitas kejadian A dan B.

$$P(C) = P(B \cap A) = P(A \cap B)$$

Probabilitas Gabungan (Joint Probability) (3/3)

- Probabilitas Gabungan dikatakan independen secara statistik (*statistic independent*) , jika memenuhi syarat: $(A \cap B) = \emptyset$
- Artinya bahwa terjadinya peristiwa A tidak dipengaruhi oleh peristiwa B, dan sebaliknya.
- Dimana $P(A \mid B) = P(A)$ dan $P(B \mid A) = P(B)$
- Sehingga probabilitas gabungan untuk A dan B adalah saling independen :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Probabilitas Marginal (Marginal Probability) (1/3)

- Probabilitas munculnya sebuah kejadian terhadap beberapa kejadian lainnya.
- Probabilitas sebuah kejadian sembarang, A apabila ada beberapa peristiwa yang terjadi lebih dulu, $B1, B2, .., Bn$ dan masing-masing peristiwa tersebut adalah saling lepas (*mutually exclusive*), dinyatakan sebagai:

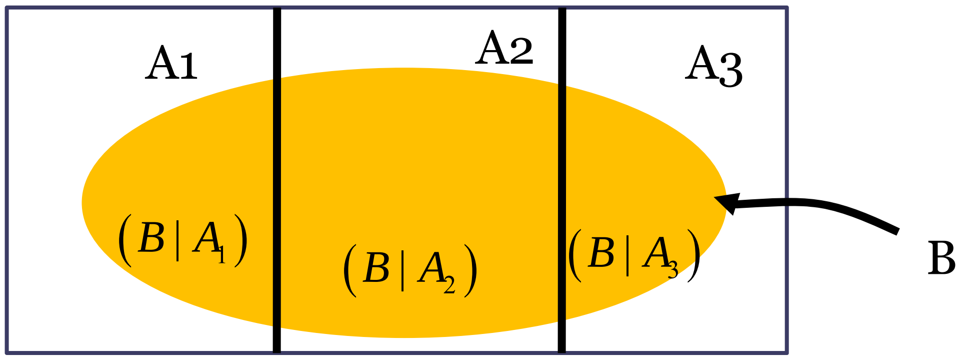
$$P(A) = P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) + \ldots + P(A|B_n).P(B_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j).P(B_j)$$

Probabilitas Marginal (Marginal Probability) (2/3)

- Apabila A1,A2 dan A3 adalah 3 kejadian yang saling lepas pada sebuah ruang sampel S, dan B adalah kejadian sembarang lainnya pada ruang sampel S tersebut maka kejadian B terhadap A1, A2 dan A3 dapat dinyatakan sebagai:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$



Probabilitas Marginal (Marginal Probability) (3/3)

- Karena kejadian $(B\cap A_1),(B\cap A_2)$ dan $(B\cap A_3)$ saling lepas, maka probabilitas kejadian B dapat dinyatakan sebagai :

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)$$

- Sedangkan:

$$P(B\cap A_1)=P(B|A_1).P(A_1),\ P(B\cap A_2)=P(B|A_2).P(A_2),$$
$$P(B\cap A_3)=P(B|A_3).P(A_3)$$

- Sehingga probabilitas marginal kejadian B :

$$P(B)=P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+\mathrm{P}(B|A_3).P(A_3)$$
$$=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i).P(A_i)$$

- Contoh 1:
  - Seorang investor potensial mengevaluasi hubungan antara kinerja reksa dana dan titel MBA dari manajernya. Didapatkan hasil seperti pada tabel di bawah.

	Reksa dana mempengaruhi pasar (B_1)	Reksa dana tidak mempengaruhi pasar (B_2)	Probabilitas Marginal $P(A_i)$
Lulusan MBA (A_1)	0,11	0,29	
Bukan Lulusan MBA (A_2)	0,06	0,54	
Probabilitas Marginal $P(B_j)$			

1. Berapa probabilitas reksadana mempengaruhi pasar yang manajernya lulusan MBA ?
2. Berapa probabilitas reksadana mempengaruhi pasar yang manajernya bukan lulusan MBA ?
3. Berapa probabilitas reksadana tidak mempengaruhi pasar

Jawab:

1. Probabilitas bahwa reksadana mempengaruhi pasar dan manager lulusan MBA

$$P\left(A_1 \cap B_1\right) = P\left(B_1 \cap A_1\right) = 0{,}11$$

2. Probabilitas bahwa reksadana mempengaruhi pasar dan manager bukan lulusan MBA

$$P\left(A_2 \cap B_1\right) = P\left(B_1 \cap A_2\right) = 0{,}06$$

3. Probabilitas bahwa reksadana tidak mempengaruhi pasar

$$P\left(B_2 \cap A_1\right) + P\left(B_2 \cap A_2\right) = P\left(B_2\right) = 0{,}29 + 0{,}54 = 0{,}83$$

- Contoh 2:

  Pak Rudi memiliki 30% keyakinan bahwa perusahaannya akan mendirikan kantor cabang baru di Bandung. Jika memang ada, dia 60% yakin bahwa dia yang akan menjadi manager di kantor cabang baru tersebut. Berapa probabilitas bahwa pak Rudi akan menjadi manager di kantor cabang Bandung ?

B=kantor cabang baru di Bandung, $P(B) = 0.3$

$M \mid B =$ pak Rudi jadi manager kantor cabang Bandung, $P(M \mid B) = 0.6$

$P(M \cap B) =$ kemungkinan jadi manager di kantor cabang Bandung

$$P(M \cap B) = P(M \mid B).P(B) = 0.6x0.3 = 0.18$$

- Contoh 3:

    Seorang supervisor makanan cepat saji selalu memeriksa kualitas makanan yang akan disajikan. Dari 100 piring tersedia ternyata ada 10 piring tanpa dilengkapi garam sachet. Apabila diambil dua piring makanan secara acak dari 100 piring tersedia, berapa probabilitas bahwa kedua piring tersebut tanpa garam sachet (pengambilan tanpa pengembalian).

$A =$ peristiwa terambilnya piring tanpa garam pertama, $P(A) = \frac{10}{100}$

$B =$ peristiwa terambilnya piring tanpa garam kedua, $P(B) = \frac{9}{99}$

Pengambilan dilakukan tanpa pengembalian,

Probabilitas terambil piring pertama dan kedua tanpa garam:

$\mathrm{P}(A \cap B) = P(A).P(B) = 10/100\, x\, 9/99 = 1/110$

Contoh 4:

Dalam sebuah negara diadakan jajak pendapat terhadap voter yang berasal dari 3 partai politik:

60 % voter dari partai Republik, 30% dari partai Demokrat dan 10% independen

Ketika pemilih tersebut ditanya tentang peningkatan anggaran belanja militer:

40% dari Republik menolak, 65% dari Demokrat menolak dan 55% dari Independen menolak

Berapa probabilitas dari pemilihan voter secara random yang menyatakan menolak peningkatan anggaran belanja militer ?

$S =$ voter di negara, $P(S) = 1$

$R =$ voter Republik, $P(R) = 0,6$

$D =$ voter Republik, $P(D) = 0,3$

$I =$ voter Republik, $P(I) = 0,1$

$P(B \mid R) =$ menolak dari voter Republik $= 0,4$

$P(B \mid D) =$ menolak dari voter Republik $= 0,65$

$P(B \mid I) =$ menolak dari voter Republik $= 0,55$

sehingga $P(B) =$ menolak :

$$P(B) = P(B \mid R).P(R) + P(B \mid D).P(D) + P(B \mid I).P(I)$$
$$= (0,4x0,6) + (0,65x0,3) + (0,55x0,1)$$
$$= 0,49$$

Probabilitas Marginal Kompleks

- Jika probabilitas marginal dari kejadian B adalah:

$$P(B) = P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \ldots + P(B|A_n).P(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$$

- Maka probabilitas kejadian bersyarat $P(A_1 | B)$ dan $P(A_2 | B)$ dapat dihitung sebagai:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1).P(A_1)}{\sum P(B|A_i).P(A_i)}$$

$$P(A_2 | B) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(B|A_2).P(A_2)}{\sum P(B|A_i).P(A_i)}$$

Teorema Bayes (1/3)

- Jika pada probabilitas kondisional, sebuah kejadian dipengaruhi oleh kejadian lain yang muncul sebelumnya,
- Maka teorema Bayes digunakan untuk mencari probabilitas dari kemungkinan penyebab yang diakibatkan oleh kemunculan sebuah kejadian
- Prosedur untuk merevisi probabilitas berdasarkan <u>informasi baru</u> dan untuk menentukan probabilitas sebagai akibat suatu pengaruh tertentu yang muncul sebelumnya

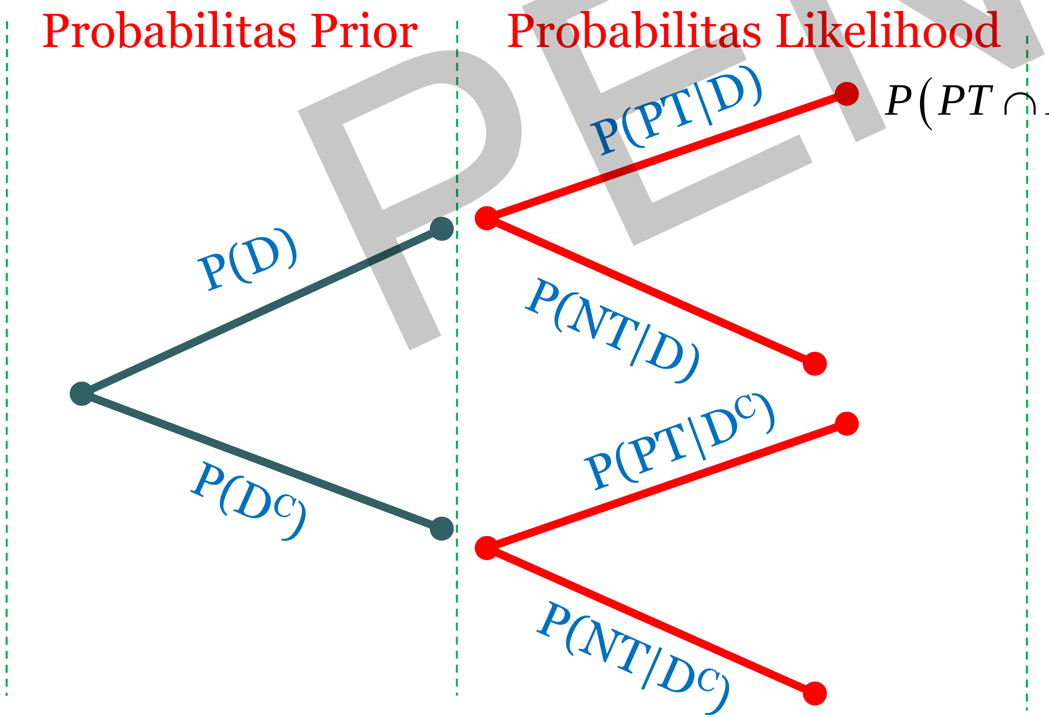
Teorema Bayes (2/3)

- Bila ada *A1*, *A2*,..*An* kejadian saling lepas dalam ruang sampel *S*, dan *B* adalah kejadian lain pada ruang sampel tersebut, probabilitas kejadian bersyarat $A_i \mid B$ dinyatakan sebagai:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)}$$

Teorema Bayes (3/3)

- Teorema Bayes dapat diilustrasikan dalam pohon probabilitas:



$$P(PT \cap D) = P(PT \mid D).P(D)$$

Probabilitas Posterior

$$P(D \mid PT) = \frac{P(PT \mid D).P(D)}{P(PT)}$$

- Contoh 1:

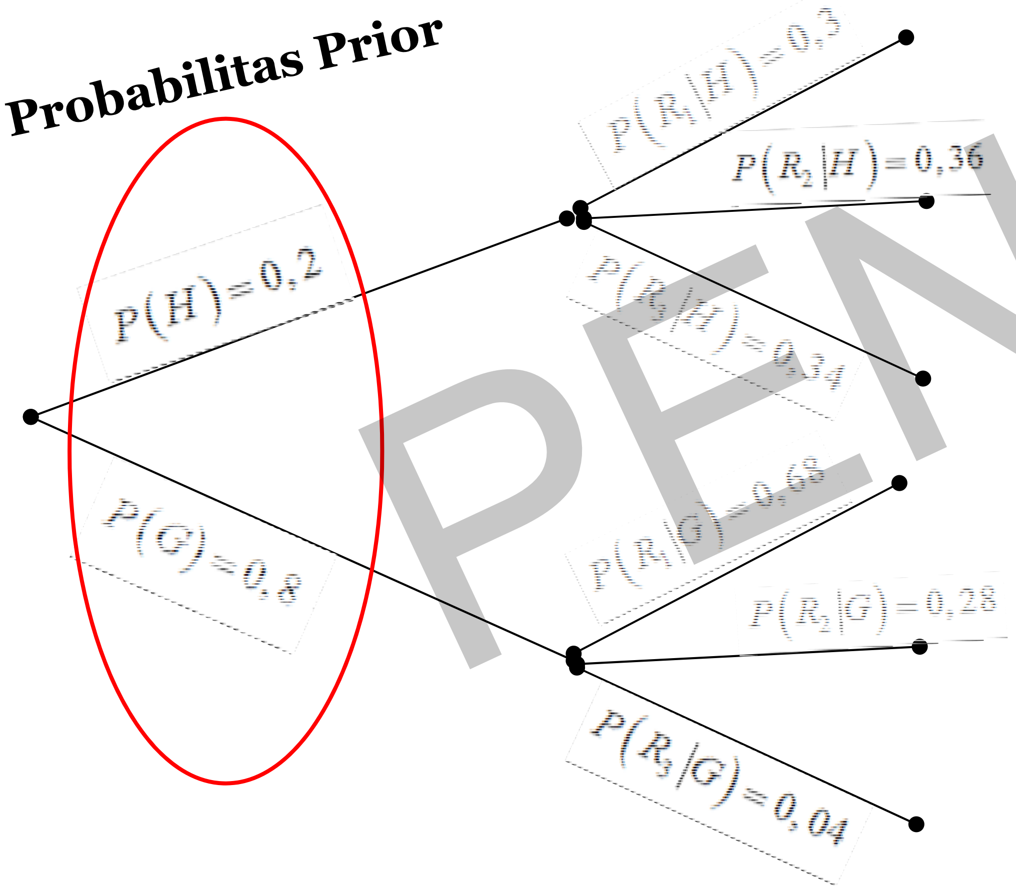
Seorang ahli geologi perusahaan minyak akan memutuskan melakukan pengeboran minyak di sebuah lokasi tertentu. Sebelumnya diperkirakan bahwa probabilitas usaha tersebut berhasil H adalah 20%, sedangkan probabilitas gagal G adalah 80%. Ahli tersebut mendapat tambahan informasi tentang akibat struktur geologis pada lokasi yg akan dijadikan pengeboran minyak.

Didapatkan ada 3 kejadian, yaitu R1 tidak terdapat struktur geologis, R2 terdapat struktur geologis terbuka dan R3 struktur geologis tertutup.

Hubungan antara struktur geologis terhadap keberhasilan pengeboran dinyatakan sebagai berikut:

- Probabilitas tidak terdapat struktur geologis akibat keberhasilan pengeboran 0,3.
- Probabilitas ada struktur geologis terbuka akibat keberhasilan pengeboran 0,36.
- Probabilitas ada struktur geologis tertutup akibat keberhasilan pengeboran 0,34.
- Probabilitas tidak terdapat struktur geologis akibat kegagalan pengeboran 0,68.
- Probabilitas ada struktur geologis terbuka akibat kegagalan pengeboran 0,28.
- Probabilitas ada struktur geologis tertutup akibat kegagalan pengeboran 0,04.

- Dapat digambarkan dalam pohon Probabilitas sebagai berikut:



Probabilitas Likelihood

$$P(R_1 \cap H) = P(R_1|H).P(H)$$
$$P(R_2 \cap H) = P(R_2|H).P(H)$$
$$P(R_3 \cap G) = P(R_3|G).P(G)$$
$$P(R_1 \cap G) = P(R_1|G).P(G)$$
$$P(R_2 \cap G) = P(R_2|G).P(G)$$
$$P(R_3 \cap G) = P(R_3|G).P(G)$$

Probabilitas Evidence

$$P(R_1), P(R_2), P(R_3)$$

Probabilitas Posterior

$$P(H|R_1) = \frac{P(H \cap R_1)}{P(R_1)}$$
$$\vdots$$
$$P(G|R_3) = \frac{P(G \cap R_3)}{P(R_3)}$$

Ditanyakan:

a. Berapa probabilitas tidak terdapat struktur geologis ?
b. Berapa probabilitas terdapat struktur geologis tertutup ?
c. Berapa probabilitas akan dihasilkan minyak dengan syarat tidak terdapat struktur geologis ?

Jawab:

a. $$P(R_1) = P(R_1|H).P(H) + P(R_1|G).P(G)$$
$$= (0,3)(0,2) + (0,68)(0,8)$$
$$= 0,06 + 0,544 \quad = 0,604$$

b. $$P(R_3) = P(R_3|H).P(H) + P(R_3|G).P(G)$$
$$= (0,34)(0,2) + (0,04)(0,8)$$
$$= 0,068 + 0,032 \quad = 0,1$$

a. dan b. adalah mencari Probabilitas Evidence dengan pendekatan probabilitas marginal

c. $$P(H|R_1) = \frac{P(H \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(R_1|H).P(H)}{P(R_1)}$$
$$= \frac{(0,3)(0,2)}{0,604} = 0,099$$

Probabilitas Posterior

- Contoh 2:
  - Suatu operator telekomunikasi nirkabel mempunyai 3 pilihan tempat untuk membangun pemancar sinyal yaitu di daerah tengah kota, daerah kaki bukit di kota itu dan daerah tepi pantai, dengan masing-masing mempunyai peluang 0.2; 0.3 dan 0.5. Bila pemancar dibangun ditengah kota, peluang terjadi gangguan sinyal adalah 0.05. Bila pemancar dibangun dikaki bukit, peluang terjadinya gangguan sinyal adalah 0.06.Bila pemancar dibangun ditepi pantai, peluang gangguan sinyal adalah 0.08.
    a. Berapakah peluang terjadinya ganguan sinyal?
    b. Bila diketahui telah terjadinya gangguan pada sinyal, berapa peluang bahwa operator tsb ternyata telah membangun pemancar di tepi pantai?

B = Peluang terjadi gangguan sinyal

A_1 = Pemancar dibangun di tengah kota

A_2 = Pemancar dibangun di kaki bukit

A_3 = Pemancar dibangun di tepi pantai

- <u>Jawab:</u>

a. Peluang terjadinya gangguan sinyal:

$$P(B) = P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + \mathrm{P}(B \mid A_3).P(A_3)$$
$$= (0,05).(0,2) + (0,06)(0,3) + (0,08)(0,5)$$
$$= 0,001 + 0,018 + 0,04 = 0,068$$

b. Peluang gangguan sinyal bila operator telah membangun pemancar di tepi pantai

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_3).P(A_3)}{P(B)}$$
$$= \frac{(0,08)(0,5)}{0,068} = 0,588$$

- Contoh 3:
  - Sebuah vendor ice cream menyediakan tiga rasa: coklat, strawberry dan vanilla. Dari penjualan tercapai sbb: 45% rasa coklat terjual, 30% rasa strawberry dan sisanya rasa vanilla. Ice cream dijual dalam cone, dimana komposisi cone terjual untuk coklat, strawberry dan vanilla adalah 75%, 60% dan 40%. Dengan penjualan secara random, didefinisikan hal-hal berikut ini
    - A1 : terpilih rasa coklat
    - A2 : terpilih rasa strawberry
    - A3 : terpilih rasa vanilla
    - B : ice cream dalam cone
    - B^C : ice cream dalam cup
  - Tentukan probabilitas bahwa:
    1. Ice cream yang dijual dalam cone dan berasa coklat
    2. Ice cream yang dijual dalam cone dan berasa strawberry
    3. Ice cream yang dijual dalam cone dan berasa vanila

- **Jawab:**

$$P(A_1)=0,45;\ P(A_2)=0,30;\ P(A_3)=0,25;$$

1. $P(B\cap A_1)=P(B\mid A_1).P(A_1)=0,75x0,45=0,338$
2. $P(B\cap A_2)=P(B\mid A_2).P(A_2)=0,60x0,30=0,18$
3. $P(B\cap A_3)=P(B\mid A_3).P(A_3)=0,40x0,25=0,1$
4. Tentukan probabilitas bahwa ice cream dijual dalam cup dan berasa coklat

$$P(B^C\cap A_1)=P(B^C\mid A_1).P(A_1)=0,25x0,45=0,113$$

5. Tentukan probabilitas bahwa ice cream dijual dalam cup

$$P(B^C)=1-P(B)=1-\left(P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+P(B|A_3).P(A_3)\right)$$
$$=1-(0,338+0,18+0,1)=0,382$$

- Tentukan probabilitas bahwa ice cream berasa coklat disebabkan karena dijual dalam cone

$$P(B) = 1 - 0,382 = 0,618$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1).P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,338}{0,618} = 0,547$$

- Tentukan probabilitas bahwa ice cream berasa coklat disebabkan karena dijual dalam cup

$$P(A_1 | B^C) = \frac{P(B^C | A_1).P(A_1)}{P(B^C)} = \frac{0,113}{0,382} = 0,296$$

Latihan soal

1. Sebuah satelit bisa gagal terbang karena faktor kesalahan mesin atau komputer. Untuk sebuah misi, diketahui bahwa probabilitas kesalahan mesin adalah 0,008, probabilitas kesalahan komputer adalah 0,001.
   Saat terjadi kesalahan mesin, probabilitas satelit gagal adalah 0,98
   Saat terjadi kesalahan komputer, probabilitas satelit gagal adalah 0,4
   Saat terjadi kesalahan komponen lain, probabilitas satelit gagal 0.
   a. Tentukan probabilitas satelit gagal terbang.
   b. Tentukan probabilitas satelit gagal terbang dan itu disebabkan karena kesalahan mesin.

2. Dari karyawan perusahaan, 30% nya adalah wanita dan 6% adalah wanita yang menikah. Berdasarkan pemilihan karyawan secara acak, dan jika yang terpilih adalah wanita, berapa probabilitasnya bahwa dia menikah ?

3. Direktur pusat komputer dari sebuah perusahaan mengestimasi bahwa 20% dari komputer di perusahaan tersebut mampu mendeteksi virus komputer. Namun dia merasa bahwa 6% dari komputer yang mampu mendeteksi virus tersebut akan men-disable operating system-nya. Jika komputer dari perusahaan tersebut mampu mendeteksi virus, berapa probabilitas bahwa operating systemnya akan di-disable kan ?

4. Medical tes di sebuah lab bisa mendapatkan hasil false-positive dan false-negatif dengan rincian sbb:

   Ketepatan diagnose “positive” adalah 94%

   Ketepatan diagnose “negatif” adalah 98%

   Jika diketahui 4% dari laki-laki di sebuah populasi terkena penyakit, berapa probabilitas seorang laki-laki yang sakit pada populasi itu hasil tes nya menunjukkan positif ?