Program Pasca Sarjana Terapan
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Probability and Random Process

Topik 11. Metode Least Square

Prima Kristalina
Juli 2015

Outline

1. Pengertian Metode Least Square
2. Beberapa persamaan Pemodelan dengan Obyek Regresi
3. Metode Least Square untuk Pemodelan Linier
4. Metode Least Square untuk persamaan Matrix
5. Weighted Least Square

Pengertian Metode Least-Square

- Metode Least-Square (Kuadrat Terkecil) adalah metode pendekatan yang banyak digunakan untuk:
    1. Pemodelan regresi berdasarkan persamaan dari titik-titik data diskritnya
    2. Analisa kesalahan pengukuran (validasi model)
- Metode Least Square ini termasuk dalam golongan metode pendekatan berdasarkan distribusi error yang terukur melalui interval pendekatan secara keseluruhan

Sumber: Dr. Setijo Bismo, TGP-FTUI, "Modul3:Regresi Linier dengan Metode Kuadrat Terkecil"

Beberapa persamaan Pemodelan dengan Obyek Regresi

- Persamaan Linier: $y = ax + b$
- Persamaan Parabolik: $y = px^2 + qx + r$
- Persamaan Polinomial: $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1}$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$
- Persamaan Eksponensial: $y = ae^{bx^2 + cx + d}$
- Persamaan Asimptotis: $y = \dfrac{ax^2 + bx}{cx + d}$

Metode Least Square untuk Pemodelan Linier

- Telah disebutkan bahwa pendekatan pemodelan secara linier diberikan dalam persamaan:

$$P(x_i) = a + bx_i$$

- Apabila diketahui variabel dari data yang akan didekati memiliki nilai: y_i
- Dicoba dilakukan pendekatan dengan Metode Least Square, dimana: $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - P(x_i)\right) = 0$
- Artinya, apabila selisih antara nilai data yang akan didekati dan hasil pemodelan mendekati nol, maka hasil pemodelan akan berimpit atau sama dengan data sesungguhnya.

- Persamaan sebelumnya, dapat dinyatakan dalam bentuk residu sbb:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)=R$$

- Untuk mendapatkan varians residu yang mendekati nol (data pemodelan mendekati data sesungguhnya), dinyatakan sebagai:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)^2=R^2$$

- Akan dicari nilai dari koefisien regresinya dengan menurunkan persamaan varians residu terhadap kedua koefisien tersebut, ***a*** dan ***b*** sbb:

$$\frac{\partial R^2}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)^2\right) \text{ dan } \frac{\partial R^2}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)^2\right)$$

- Sehingga:

$$\frac{\partial R^2}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)^2\right)=0$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-bx_i\right)\left(-1\right)=0 \quad \rightarrow \quad an+b\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}y_i \qquad (1)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\left(a+bx_i\right)\right)^2\right)$$

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-bx_i\right)\left(-x_i\right)=0 \quad \rightarrow \quad a\sum_{i=1}^{m}x_i+b\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i \qquad (2)$$

- Substitusikan persamaan (1) dan (2), didapatkan:

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \qquad b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

Metode Least Square dengan penyelesaian matriks

- Jika hubungan antara nilai pendekatan dengan data sesungguhnya, masing-masing dinyatakan sbb:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_n \end{aligned}$$

Dalam bentuk matriks →

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

- Dapat dituliskan sebagai: $\mathbf{Y} = \mathbf{bX}$ dimana: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$
- Dengan **Y** adalah matriks *nx1*, **X** adalah matrik *nx2* dan **b** adalah matriks *1x2*.
- Koefisien regresi **b** dapat dicari secara matriks dengan persamaan: $\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}$

- <u>Contoh soal 1:</u>
  - Diketahui satu set data dari dua variabel sebagai berikut:

No	x	y
1	-1	5
2	2	9
3	3	13
4	5	17
5	7	21
6	9	25
7	11	29

Dapatkan koefisien regresinya, a dan b dengan:

1. Persamaan Least square dengan Metode regresi linier
2. Persamaan Least Square matriks
3. Plot-kan hasil pemodelan liniernya

- Jawab:
  - Dengan metode regresi linier:

$$a = \frac{290(119) - 828(36)}{7(290) - 36^2} = 6,4 \quad b = \frac{7(828) - 36(119)}{7(290) - 36^2} = 2,06$$

  - Sehingga persamaan pemodelan: $P(X) = 6,4 + 2,06X$
  - Dengan persamaan matriks:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \\ 17 \\ 21 \\ 25 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 9 & 1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

dengan bantuan Matlab didapatkan:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2,0599 \\ 6,406 \end{bmatrix}$$