

Program Pasca Sarjana Terapan
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya



Probability and Random Process

Topik 10. Regresi

Prima Kristalina
Juni 2015

Outline

1. Konsep Regresi Sederhana
2. Persamaan Regresi Sederhana
3. Contoh soal Regresi Sederhana
4. Pengujian Hipotesis Regresi Sederhana
5. Analisa Regresi Berganda
6. Contoh soal Regresi Berganda

Konsep Regresi Sederhana (1/4)

- Ada dua macam hubungan antara dua atau lebih variabel:
 - Bentuk Hubungan → Analisa Regresi
 - Keeratan Hubungan → Analisa Korelasi
- **Analisa Regresi** digunakan untuk mengetahui bentuk hubungan dua atau lebih variabel, terutama untuk mengetahui pola yang modelnya belum diketahui dengan sempurna
- Atau untuk mengetahui bagaimana variasi dari beberapa variabel independen mempengaruhi variabel dependen dalam sebuah fenomena yang kompleks.

Konsep Regresi Sederhana (2/4)

- Ada 3 fungsi analisa Regresi:
 1. Untuk tujuan deskripsi dari fenomena data/kasus yang diamati
 2. Untuk tujuan kontrol/pengendalian dari kasus yang diamati
 3. Untuk prediksi dari kasus yang diteliti (dalam interval data dari variabel independen yang membentuk model regresi tersebut) → interpolasi
- **Regresi sederhana:** Mencari hubungan antara satu variabel independen (bebas) dengan satu variabel dependen (terikat).

Konsep Regresi Sederhana (3/4)

- Pengertian variabel pada analisa Regresi
 - Variabel Independen (variabel bebas): variabel yang berdiri sendiri, dan tidak bisa dirubah oleh variabel lain.
 - Contoh: usia seseorang, tingkat kepandaian, kebiasaan.
 - Dalam statistik, variabel bebas ini biasanya digunakan sebagai input untuk mempengaruhi variabel terikat.
 - Variabel dependent (variabel terikat): variabel yang terikat / tergantung dari faktor lain.
 - Contoh: hasil test seseorang, tergantung dari seberapa banyak sarapannya, waktu tidurnya, kesiapan belajarnya dsb.
 - Dalam statistik, variabel terikat ini biasanya berperan sebagai output yang dipengaruhi variabel bebas

Konsep Regresi Sederhana (4/4)

- Jika $\{X_1, X_2, \dots, X_i\}$ adalah variabel-variabel independen (bebas) dan Y adalah variabel dependen (terikat), maka terdapat hubungan fungsional antara X dan Y , dituliskan sbb:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \varepsilon)$$

- Dan ε adalah variabel residu

Persamaan Regresi Sederhana (1/2)

- Model persamaan Regresi Sederhana adalah:

$$\hat{y} = a + bx$$

dimana:

Y = variabel dependen (terikat)

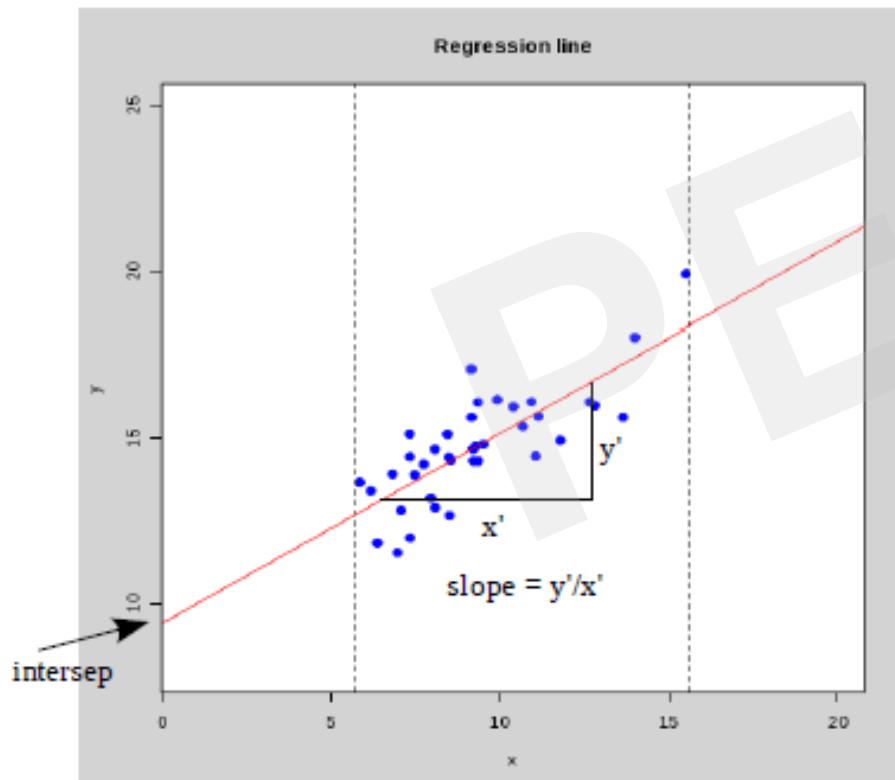
X = variabel independen (bebas)

a = estimasi untuk intercept (perpotongan dgn garis y , dimana $x=0$)

b = koefisien regresi, slope dari x/y

a dan b adalah parameter yg tidak diketahui, dicari dgn statistik

Persamaan Regresi Sederhana (2/2)



$$a = \frac{\sum Y - b \sum X}{N} = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$b = \frac{N(\sum XY) - \sum X \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

- Contoh soal 1:

Sebuah penelitian yang bertujuan untuk mengetahui adakah hubungan antara besarnya pendapatan (X) dengan banyaknya konsumsi (Y). Untuk itu diambil sampel acak sebanyak (n) 10 keluarga untuk diwawancarai, diperoleh hasil sbb:

Pendapatan (X)	6	8	10	12	13	17	20	22	24	28
Konsumsi (Y)	5	6	8	9	10	12	12	14	15	20

- a. Hitung koefisien regresi dan tentukan persamaan regresinya.
- b. Gambar dan plot kan pada grafik, persamaan regresi dan data penelitian tsb.

- Jawab:

- Perhitungan dengan Excel:

n	X	Y	X ²	Y ²	X.Y
1	6	5	36	25	30
2	8	6	64	36	48
3	10	8	100	64	80
4	12	9	144	81	108
5	13	10	169	100	130
6	17	12	289	144	204
7	20	12	400	144	240
8	22	14	484	196	308
9	24	15	576	225	360
10	28	20	784	400	560
Jumlah	160	111	3046	1415	2068
Mean	16	11,1			

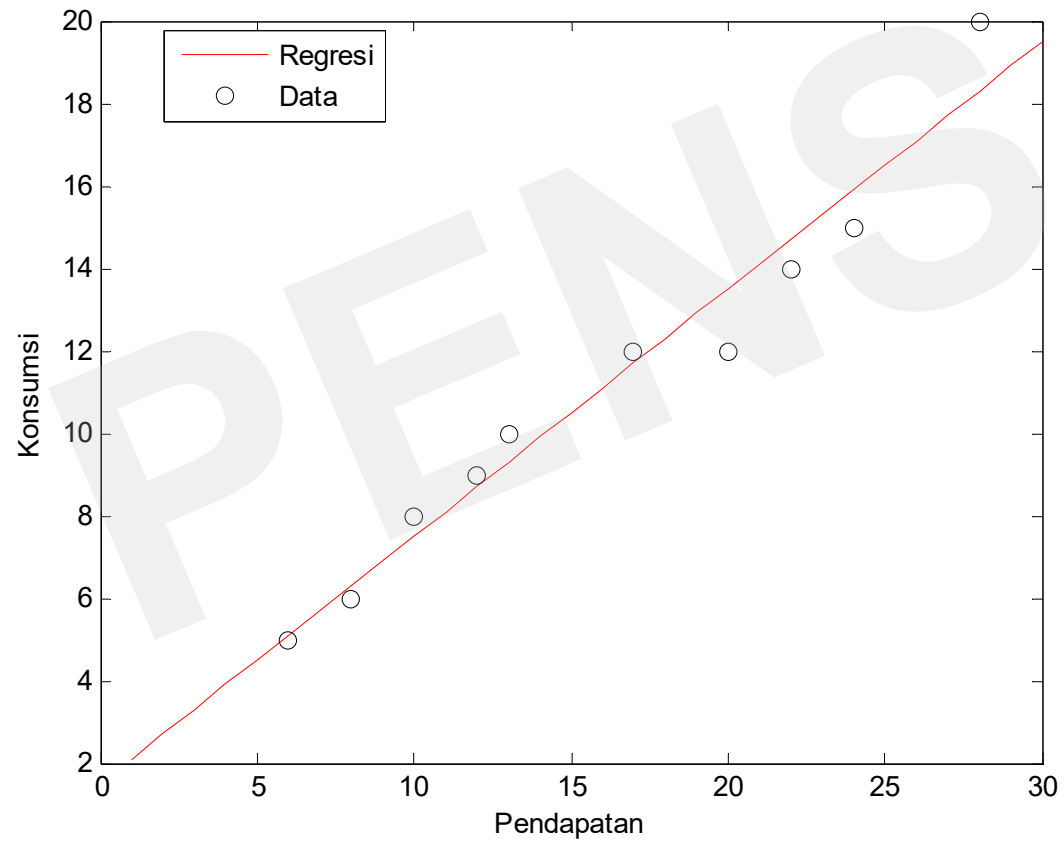
$$b = \frac{10.2068 - 160.111}{10.3046 - 160.160} = 0,6$$

$$a = \frac{111 - 0,6.160}{10} = 1,50$$

Sehingga persamaan regresi linier menjadi:

$$\hat{y} = 1,5 + 0,6\hat{x}$$

□ Plot Matlab



- Soal Latihan (Kerjakan sebagai materi praktikum)
 1. Hubungan antara kompetensi (X) dan kinerja pegawai (Y) diambil sampel acak 15 orang pegawai adalah sebagai berikut :

X	40	55	32	55	50	52	61	44	30	22	40	64	58	48	44
Y	4	16	12	24	15	24	22	17	4	14	24	26	20	9	14

- Carilah koefisien regresi dan tentukan persamaan regresinya.
- Dapatkan grafik dan plot scatter persamaan dan data pengujiannya

2. Hasil observasi terhadap sampel acak 8 desa mengenai pendapatan dan keperluan kesehatan penduduk desa yang bersangkutan selama tahun 2010 diberikan pada tabel sbb:
- Tentukan persamaan regresi linier dari hubungan tersebut
 - Berapa rata-rata pendapatan penduduk ke-8 desa tersebut dan berapa simpangan bakunya .
 - Ujilah hasil yang menyatakan bahwa rata-rata pendapatan penduduk tersebut adalah Rp 12 juta, dengan tingkat keyakinan 90%.

Desa	A	B	C	D	E	F	G	H
Pendapatan (Juta Rp)	21	15	15	9	12	18	6	12
Kep.Kesehat an Juta Rp.)	4	3	3,5	2	3	3,5	2,5	2,5

Pengujian Hipotesis Regresi Sederhana

- **Uji t**, dilakukan untuk menguji Koefisien regresi secara individual atau untuk menguji ada tidaknya pengaruh variabel bebas X terhadap variabel terikat Y.
- **Uji F** dilakukan untuk menguji koefisien regresi secara simultan atau untuk menguji keberartian model regresi yang digunakan

Pengujian Hipotesis Regresi Sederhana

• Uji t:

▫ Hipotesis Statistiknya:

$H_0: \beta = 0$ (X tidak berpengaruh terhadap Y)

$H_1: \beta \neq 0$ (X berpengaruh terhadap Y)

Statistik Uji:

$$t = \frac{b}{S_b} \rightarrow S_b = \sqrt{\frac{S_e^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \rightarrow S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - b \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \rightarrow \text{variance kesalahan estimasi}$$

Kriteria Uji: Tolak H_0 jika $t_{uji} \geq t_{tabel}$ atau $t_{uji} \leq -t_{tabel}$

Dengan $t_{tabel} = t_{0,5\alpha; df=n-2}$

Konsep Regresi Berganda (1/4)

- Digunakan untuk mengidentifikasi atau meramalkan (predicting) nilai pengaruh dua atau lebih variabel independen (bebas) terhadap satu variabel dependen (terikat).
- Membuktikan ada tidaknya hubungan fungsional atau kausal antara dua atau lebih variabel bebas X_1, X_2, \dots, X_i terhadap variabel terikat Y .

Konsep Regresi Berganda (2/4)

- Persamaan Regresi Ganda (Multiple Regression) dengan beberapa variabel bebas:

Dua variabel bebas: $\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2$

Tiga variabel bebas: $\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$

n variabel bebas: $\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$

Konsep Regresi Berganda (3/4)

- Nilai Intercept dan koefisien regresi berganda:
 - Untuk 2 variabel bebas

$$b_1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_2 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$
$$b_2 = \frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_1 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$
$$a = \frac{\sum Y}{n} - b_1 \left(\frac{\sum X_1}{n} \right) - b_2 \left(\frac{\sum X_2}{n} \right)$$

Konsep Regresi Berganda (4/4)

- Untuk 3 variabel bebas

$$\sum x_1 y = b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + b_3 \sum x_1 x_3$$

$$\sum x_2 y = b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 + b_3 \sum x_2 x_3$$

$$\sum x_3 y = b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2 x_3 + b_3 \sum x_3^2$$

$$a = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2 - b_3 \bar{X}_3$$

- Dan:

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$\sum x_i y = \sum X_i Y - \frac{\sum X_i \sum Y}{n}$$

$$\sum x_i x_j = \sum X_i X_j - \frac{\sum X_i \sum X_j}{n}$$

- Contoh Soal 2:

- Seorang peneliti ingin mengetahui pengaruh antara Kompetensi Individu (X_1) dan Komitmen Organisasi (X_2) dengan Kinerja Pegawai (Y). Sejumlah angket disebar kepada 30 pegawai dan didapatkan hasil pengolahan data sbb:

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_1	153	152	169	177	183	155	170	166	150	162	156	178	161	168	156	171	159	173	174	176	166	153	158	182	155	179	169	185	153	165
X_2	155	142	172	173	157	157	152	172	153	144	167	154	148	154	143	145	173	173	160	142	148	152	169	141	142	146	163	166	163	156
Y	200	188	209	184	206	183	192	203	210	179	217	210	197	195	195	189	198	198	212	211	204	192	212	199	191	217	214	200	203	201

- Berdasarkan data tersebut, hitung koefisien regresinya dan dapatkan persamaan regresinya.

- Jawab:

- Hitung rata-rata skor variabel X, X2 dan Y:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n} = \frac{4974}{30} = 165,8$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n} = \frac{4682}{30} = 156,067$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{\sum Y}{n} = \frac{6009}{30} = 200,3$$

- Hitung Koefisien regresi:

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n} = 827860 - \frac{(4974)^2}{30} = 3170,8$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n} = 734114 - \frac{(4682)^2}{30} = 3409,87$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{\sum X_1 \sum Y}{n} = 996964 - \frac{4974 \times 6009}{30} = 671,87$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{\sum X_2 \sum Y}{n} = 938594 - \frac{4682 \times 6009}{30} = 789,4$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{\sum X_1 \sum X_2}{n} = 776527 - \frac{4974 \times 4682}{30} = 251,4$$

• Sehingga:

$$b_1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_2 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{3409,87 \times 671,87 - 251,4 \times 789,4}{3170,8 \times 3409,87 - (251,4)^2} = 0,1947$$

$$b_2 = \frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_1 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{3170,8 \times 789,4 - 251,4 \times 671,67}{3170,8 \times 3409,87 - (251,4)^2} = 0,2172$$

$$a = \frac{\sum Y}{n} - b_1 \left(\frac{\sum X_1}{n} \right) - b_2 \left(\frac{\sum X_2}{n} \right) = 200,3 - 0,1947 * 165,8 - 0,2172 * 156,067 = 134,13$$

• Jadi, persamaan regresi menjadi:

$$\hat{Y} = 134,13 - 0,1947 X_1 - 0,2172 X_2$$