PERCOBAAN 3

PROBABILITAS KONDISIONAL, MARGINAL DAN TEOREMA BAYES

3.1. Tujuan :

Setelah melaksanakan praktikum ini mahasiswa diharapkan mampu :

- Membuat pemrograman untuk penyelesaian kasus menggunakan probabilitas kondisional, marginal dan teorema Bayes
- Membedakan penyelesaian kasus menggunakan probabilitas kondisional, marginal dan Bayesian

3.2. Peralatan :

- Laptop / PC Desktop yang support dengan program Matlab
- Bahasa Pemrograman Matlab versi 2009 ke atas

3.3. Teori :

Pada lebih dari satu kejadian dalam sebuah ruang sampel, masing-masing kejadian tersebut bisa saling mempengaruhi atau tidak. Keterkaitan pengaruh antar mereka bisa sangat kuat, atau bisa longgar. Berdasarkan kondisi saling pengaruh, probabilitas dua atau lebih kejadian bisa dibedakan menjadi 2:

1. Probabilitas Bersyarat (Conditional Probability), dimana kemunculan sebuah kejadian tergantung dari kejadian lain yang telah muncul sebelumnya.
2. Probabilitas Tidak Bersyarat (Unconditional Probability), dimana kemunculan sebuah kejadian tidak harus bergantung kepada kejadian lain yang muncul sebelumnya. Kejadian tersebut bisa berdiri sendiri.

3.3.1. Probabilitas Tidak Bersyarat (*Unconditional Probability*)

Sebuah kejadian bisa muncul pada ruang sampel dengan karakteristik tertentu, dan pada ruang sampel tersebut terdapat beberapa kejadian yang masing-masing memiliki karakteristik sendiri. Apabila masing-masng kejadian saling tidak berkaitan atau tidak berpengaruh pada waktu yang bersamaan, maka kejadian-kejadian tersebut memiliki sifat mutually exclusive (saling lepas). Persamaan Probabilitas tidak bersyarat dari dua kejadian dinyatakan sebagai:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

Apabila sebuah kejadian diambil dari beberapa kejadian lain yang saling lepas, maka probabilitasnya termasuk marginal (marginal probability).

3.3.2. Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

Apabila sebuah kejadian B terjadi lebih dahulu dan kemudian kejadian A dicari probabilitasnya terhadap pengaruh dari kejadian B, maka probabilitas dari kejadian A disebut sebagai probabilitas bersyarat, dinyatakan sebagai:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ \ P(B)>0 \qquad (2)$$

Persamaan (2) menunjukkan bahwa adalah probabilitas terjadinya peristiwa B, adalah probabilitas terjadinya peristiwa A dan B secara bersama-sama dan adalah probabilitas terjadinya peristiwa A dengan syarat peristiwa B terjadi lebih dulu. Dengan cara yang sama, probabilitas terjadinya peristiwa B apabila peristiwa A terjadi lebih dulu dinyatakan sebagai:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)},\ \ P(A)>0 \qquad (3)$$

Berdasarkan waktu kemunculan dua atau lebih kejadian, probabilitas kemunculan kedua atau lebih kejadian tersebut dibedakan menjadi dua macam: Probabilitas Gabungan (Joint Probability) dan Probabilitas Marginal (Disjoint Probability). Hubungan dari kedua macam probabilitas ini ditunjukkan pada Gambar 3.1.

Joint Probability
dari A2 dan B1

	A_1	A_2	TOTAL
B_1	a/N	b/N	(a+b)/N
B_2	c/N	d/N	(ac+d)/N
TOTAL	(a+c)/N	(b+d)/N	

Marginal Probability
dari A1

Gambar 3.1. Hubungan Probabilitas Gabungan dan Marginal dalam Penyajian Data

3.3.3. Probabilitas Gabungan (*Joint Probability*)

Dinamakan demikian karena dua atau lebih kejadian muncul secara bersamaan. Beberapa buku menyebutkan sebagai prbabilitas irisan (interseksi). Penamaan ini berkaitan dengan sifat dari probabilitas tersebut yang merupakan bagian dari kedua kejadian, sama seperti sifat interseksi pada teori himpunan. Probabilitas ini bisa didapatkan dengan mengalikan probabilitas bersyarat dari kedua kejadian tesebut dengan probabilitas sebuah kejadian yang mendahului kejadian lainnya. Persamaan probabilitas gabungan antara dua kejadian dinyatakan sebagai:

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A), \tag{4}$$

dimana $P(A), P(B) > 0$

Probabilitas gabungan dikatakan independen secara statistik jika memenuhi syarat: $(A \cap B) = \varnothing$, artinya bahwa terjadinya peristiwa A tidak ada kaitannya dengan terjadinya peristiwa B, dimana: $P(A|B) = P(A)$ dan $P(B|A) = P(B)$ sehingga probabilitas gabungan dari kejadian A dan B adalah saling independen, dan dinyatakan sebagai:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \tag{5}$$

3.3.4. Probabilitas Marginal (*Marginal Probability*)

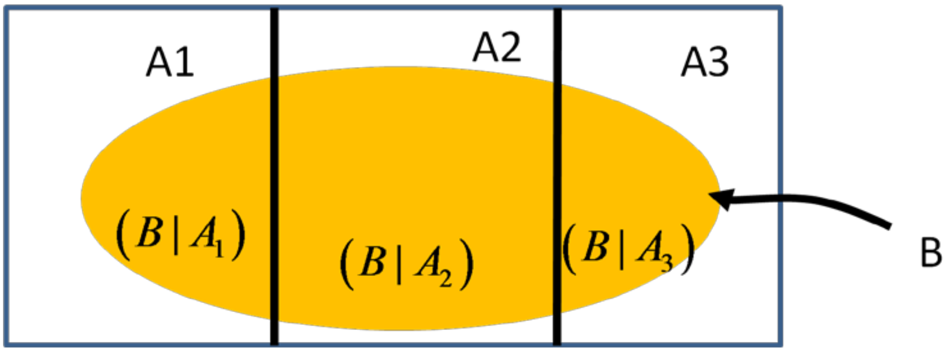
Probabilitas marginal merupakan probabilitas kemunculan sebuah kejadian karena ada beberapa kejadian lain yang mempengaruhinya. Probabilitas kejadian sembarang, A apabila ada beberapa peristiwa lain yang terjadi lebih dulu, misalkan, B_1, B_2, ..., *dst* dan masing-masing kejadian tersebut saling lepas (mutually exclusive) dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) + \ldots + P(A|B_n).P(B_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j).P(B_j) \end{aligned} \tag{6}$$

Apabila A_1, A_2, dan A_3 adalah 3 kejadian yang saling lepas pada sebuah ruang S, dan B adalah kejadian sembarang lain pada ruang S tersebut maka kejadian B terhadap kejadian A_1, A_2, dan A_3 berturut-turut dinyatakan sebagai;

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \tag{7}$$

Hubungan antara kejadian B dan kejadian A_1, A_2, dan A_3 seperti ditunjukkan pada gambar 3.2.



Gambar 3.2. Hubungan antara Kejadian B dan Kejadian A_1, A_2, dan A_3 pada ruang sampel S

Karena kejadian $(B\cap A_1),(B\cap A_2)$ dan $(B\cap A_3)$ adalah saling lepas, maka probabilitas kejadian B dapat dinyatakan sebagai:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3) \tag{8}$$

Dari persamaan tentang probabilitas gabungan dapat diketahui probabilitas gabungan dari kejadian B terhadap masing-masing kejadian A_1, A_2, dan A_3 dinyatakan sebagai:

$$P(B\cap A_1)=P(B|A_1).P(A_1),\ P(B\cap A_2)=P(B|A_2).P(A_2) \text{ dan } P(B\cap A_3)=P(B|A_3).P(A_3) \tag{9}$$

Maka probabilitas marginal dari kejadian B pada persamaan (8) menjadi:

$$\begin{aligned} P(B)&=P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+P(B|A_3).P(A_3) \\ &=\sum_{j=1}^{3}P(B|A_j).P(A_j) \end{aligned} \tag{10}$$

3.3.5. Teorema Bayes

Untuk mendapatkan probabilitas sebuah kejadian yang dipengaruhi oleh kejadian lain (atau kejadian-kejadian lain) yang muncul sebelumnya, digunakan probabilitas kondisional atau probabilitas marginal. Pada kejadian yang lebih kompleks, untuk mencari kemungkinan penyebab yang diakibatkan oleh sebuah kejadian digunakan Teorema Bayes.

Sebuah persamaan Bayes melibatkan probabilitas apriori (atau prior), probabilitas posterior dan fungsi likelihood. Probabilitas prior adalah probabilitas dari kejadian yang dicari penyebabnya, biasanya probabilitas ini dihasilkan dari probabilitas marginal terhadap kejadian-kejadian sebelumnya. Probabilitas posterior adalah probabilitas dari kejadian-kejadian yang dicari penyebabnya terhadap kejadian lain yang menjadi penyebabnya dan fungsi likelihood merupakan perkalian dari probabilitas kondisional dengan probabilitas prior dari kejadian yang menjadi penyebab. Teorema Bayes beberapa kejadian A_1, A_2,...,A_n terhadap sebuah kejadian yang mendahui, B, dinyatakan sebagai:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)} \tag{11}$$

Dimana $P(A_i \mid B)$ adalah probabilitas posterior, $P(B)$ adalah probabilitas prior dan $P(B \cap A_i)$ adalah fungsi likelihood.

3.4. Prosedur

3.4.1. Probabilitas Gabungan (*Joint Probability*)

1. Diberikan kasus sebagai berikut: Distribusi anak laki-laki dan perempuan di sebuah sekolah dasar berdasarkan umur diberikan dalam tabel di bawah ini:

	Umur					
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**TOTAL**
laki-laki	20	10	30	20	40	120
perempuan	30	20	10	15	25	100
TOTAL	50	30	40	35	65	220

2. Buatlah program dengan matlab untuk mendapatkan:
   a. Distribusi jumlah masing-masing jenis kelamin dalam setiap umur.
   b. Jika diambil secara acak seorang anak, berapa probabilitasnya bahwa anak tersebut berusia 7 tahun ?
   c. Jika diambil secara acak seorang anak laki-laki, berapa probabilitasnya bahwa usianya 9 tahun ?
   d. Jika diambil secara acak seorang anak, berapa probabilitasnya bahwa anak tersebut perempuan yang usianya 11 tahun ?

```
% Program : Join.m
% Membuat fungsi probabilitas joint untuk 2 distribusi umur dan
% jenis kelamin siswa SD

clear all; clc;
% Data Murid
N=220;L=120;P=100;U7=50;U8=30;U9=40;U10=35;U11=65;

% A. Distribusi jumlah masing=masing jenis kelamin setiap umur
PL=L/N;    %Probabilitas anak laki-laki
PP=P/N;    %Probabilitas anak perempuan
P7=U7/N;   %Probabilitas usia 7 tahun
P8=U8/N;   %Probabilitas usia 8 tahun
P9=U9/N;   %Probabilitas usia 9 tahun
P10=U10/N; %Probabilitas usia 10 tahun
P11=U11/N; %Probabilitas usia 11 tahun

% B. Probabilitas seorang anak usia 7 tahun
PA7=P7

% C. Probabilitas seorang anak laki-laki usia 9 tahun
PL7=30/PL

% D. Probabilitas anak yang perempuan dan usia 11 tahun
PAP=25/N
```

3.4.2. Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

1. Diberikan kasus sbb: Hasil tes darah dari pasien Rumah Sakit untuk dua **suspect** penyakit yaitu demam berdarah dan tipus menggunakan metode Widal menunjukkan distribusi seperti pada tabel di bawah.

	Widal+	Widal-	TOTAL
Demam Berdarah	20	40	60
Tipus	30	10	40
TOTAL	50	50	100

2. Buatlah program dengan matlab untuk mendapatkan:
   a. Probabilitas bahwa yang terpilih secara acak adalah pasien dengan hasil Widal+.
   b. Probabilitas yang terpilih adalah pasien sakit tipus dengan widal+.
   c. Probabilitas yang terpilih dari widal+ adalah pasien demam berdarah.

3.4.3. Probabilitas Marginal (*Marginal Probability*)

1. Diberikan kasus sbb: Dalam jajak pendapat pemilihan lurah dengan lambang padi, kapas dan jagung didapatkan hasil bahwa 50% pemilih memilih lambang padi, 30%

lambang kapas dan 20% lambang jagung. Ketika para pemilih tersebut ditawarkan perlunya membangun kantor baru untuk lurah yang terpilih:

40% dari pemilih padi menolak, 50% setuju dan 10% abstain.

60% dari pemilih kapas menolak, 20% setuju dan 20% abstain.

30% dari pemilih jagung menolak, 60% setuju dan 10% abstain.

2. Buatlah program matlab yang dapat menghitung:
   a. Berapa probabilitas dari para pemilih tersebut yang menolak pembangunan kantor lurah baru ?
   b. Berapa probabilitas dari para pemilih tersebut yang setuju dengan pembangunan kantor lurah baru ?

3.4.4. Teorema Bayes (*Bayes Theorem*)

1. Diberikan kasus sbb: Petani apel di Malang telah memperhitungkan kemungkinan suksesnya panen terhadap beberapa jenis apel yang ditanam. Dengan menanam apel Batu, akan ada peluang 50% sukses panen, dengan apel manalagi ada peluang 30% sukses dan menanam apel granny medapat peluang kesuksesan 20%. Diperhitungkan pula adanya gangguan penyakit karena jamur. Pada tanaman apel Batu peluang terkena hama jamur adalah 5%, pada apel manalagi 15% dan pada apel granny 8%.
2. Buatlah program matlab untuk mendapatkan:
   a. Peluang terjadinya hama jamur.
   b. Bila diketahui terjadi hama jamur, berapa peluang bahwa petani telah menanam apel manalagi ?

3.5. Analisa dan Kesimpulan

Analisalah dari masing-masing kasus yang telah diselesaikan dengan Matlab tersebut, mana kasus yang bisa diselesaikan hanya dengan satu jenis probabilitas, dan mana yang harus menggunakan beberapa jenis probabilitas ?

3.6. Tugas

Dari data thesis yang telah anda dapatkan, bisakah dianalisa mana yang membutuhkan penyelesaian dengan probabilitas bersyarat, marginal atau teorema Bayes ? Tuliskan pendapat anda (apabila mungkin, berikan data hasil penyelesaian dengan probabilitas yang anda pilih).